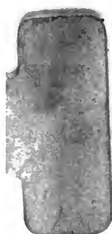
DIDION

CALCUL
DES
PROBABILITÉS
APPLIQUÉ
AU TIR
DES
PROJECTILES





CALCUL

DES

PROBABILITÉS

APPLIQUÉ

AU TIR DES PROJECTILES

PAR **Is. DIDION**

COLONEL D'ARTILLERIE.



PARIS

J. DUMAINE,	MALLET-BACHELIER,
LIBRAIRE-ÉDITEUR DE L'EMPEREUR,	IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Rue et Passage Dauphine, 30.	**Quai des Augustins, 55.**

1858

Imprimerie de Cosse et J. Dumaine, rue Christine, 2.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

CALCUL
DES PROBABILITÉS
APPLIQUÉ
AU TIR DES PROJECTILES.

AVANT-PROPOS.

La connaissance des lois des écarts des projectiles dans le tir est d'une grande importance pour l'artillerie et pour l'emploi des armes en général ; elle aide à diriger le tir des armes à feu et des bouches à feu, de manière à donner les plus grandes chances de frapper un but.

Les points frappés par les projectiles, parfois très-éloignés les uns des autres, ne paraissent d'abord soumis à aucune loi ; aussi, l'on n'a pas toujours su déduire, de leur position observée à certaines distances, le terme de comparaison de deux tirs différents, et moins encore définir ce qu'on devait appeler la justesse d'une arme. Les auteurs anciens, Antoni, Lombard, Véga, Scharnhorst, n'avaient pas même une manière commune de comparer les portées.

Le manque de principes arrêtés sur cet objet était bien reconnu en France par le Comité de l'artillerie, lorsque, dans sa séance du 1er février 1828, il mettait la question au concours entre les officiers d'artillerie, pour l'année 1829 et formulait le programme en ces termes (*) :

« Indiquer, en se fondant sur les principes connus de la « théorie des probabilités, le meilleur mode à adopter pour la

(*) *Mémorial d'artillerie*, n° 2, 1828, pag. 25, 26.

« recherche des portées moyennes, discuter le mérite relatif « des divers procédés en usage. »

« L'étendue superficielle de l'objet à frapper, et sa position « relativement à la batterie étant données, assigner, pour cha- « cune des bouches à feu, la fraction exprimant le rapport « entre le nombre total de coups et les coups à effets. »

Trois mémoires furent adressés, à ce sujet, mais aucun n'offrait une solution assez complète et assez satisfaisante pour mériter le prix (*).

Poisson fit, à cette époque, une chose très-utile en présentant les formules relatives au calcul des probabilités, avec autant de concision que possible, en indiquant leur emploi, et surtout en fixant le sens précis qu'on doit y attacher, et en insérant à cet effet une note au *Mémorial de l'artillerie* (**).

Poisson définit la moyenne qui doit être regardée comme l'expression la plus rapprochée qu'on recherche, d'après un certain nombre d'observations, et il donne, sans la démontrer, la règle de Laplace pour trouver la probabilité que cette moyenne ne s'écarte de la vraie valeur que d'une quantité donnée, laquelle dépend de la somme des carrés des écarts et du nombre des observations ; il montre comment cette règle peut s'appliquer au tir à la cible. Il indique ensuite comment la comparaison de la somme des carrés des écarts au nombre de coups peut servir à apprécier, soit la plus grande justesse d'une arme, soit la plus grande adresse d'un tireur; il donne enfin une formule qui détermine le rayon d'une cible circulaire, qu'on aurait une probabilité déterminée de toucher à chaque coup. Ces deux propositions donnent lieu à des observations dont il sera question plus loin (art. 24).

Poisson ayant reconnu que ces formules avaient été utilisées dans l'artillerie pour comparer la justesse de différents fusils, s'est proposé de développer davantage cette application du calcul des probabilités. Ce savant géomètre a publié, à cet effet, un mémoire très-remarquable sous le titre : *Mémoire sur la*

(*) *Mémorial d'artillerie*, n° 3, 1829, pag. 30.

(**) Formules de probabilité relatives au résultat moyen des observations. (*Mémorial d'artillerie*, n° 3, 1830.)

probabilité du tir à la cible, dont l'objet était principalement de trouver la probabilité de l'écart d'une moyenne, et de permettre de comparer la justesse du tir de deux armes et de deux tireurs. Tout en regardant la loi de la probabilité des écarts comme inconnue, il admet qu'il y a un point, qu'il appelle *le centre de la cible*, tel qu'à droite ou à gauche de la verticale qui passe par ce point, la loi de probabilité des écarts est semblable, et qu'il en est de même relativement à l'horizontale qui passe par ce même point.

En se fondant sur le décroissement très-rapide de la probabilité de frapper une verticale donnée, dès que les écarts atteignent une certaine grandeur, et que le nombre des coups tirés est considérable, il arrive à la formule de Laplace qui donne la probabilité que la moyenne (*) des distances d'un nombre limité de coups ne s'écarte que d'une quantité donnée de la moyenne véritable. Il montre que de deux armes, comparées sous le rapport de la justesse, la meilleure est celle pour laquelle est remplie une condition qui équivaut à celle d'un minimum pour la moyenne des carrés des distances au centre de la cible. Il cherche des propriétés analogues autour d'une ligne quelconque menée par le centre. Il fait voir que ce point jouit des propriétés analogues, quant aux écarts, quant à la moyenne des écarts et aux carrés des écarts.

Dans ce mémoire, Poisson n'a rien ajouté à ce qu'il avait donné dans le précédent, sur la probabilité d'atteindre une cible circulaire d'un rayon donné.

Poisson s'occupait alors de l'influence qu'avait dans le tir le mouvement de rotation des projectiles, et, à la demande de ce savant géomètre, transmise par M. le général Morin, j'exécutai à Metz, en 1838, des expériences sur la justesse de tir des balles sphériques aplaties ou allongées, animées d'un mouvement de rotation autour de l'axe de figure, axe qui, à l'origine du mouvement, se confondait avec l'axe du canon. Dans le mémoire, qui renfermait les résultats des expériences (**), je com-

(*) *Mémorial d'artillerie*, n° 4, pag. 59, 1837

(**) *Expérience sur la justesse du tir comparé des balles sphériques, plates et longues*, et *Journal de l'École polytechnique*, 27e cahier, 1839.

parais la justesse des diverses balles par les racines carrées de la moyenne des carrés des écarts, soit horizontaux, soit verticaux, soit absolus, et rapportés au point particulier que nous avons spécifié plus haut, et que j'appelais le point d'impact moyen. Je les comparais également par les côtés des carrés qui étaient atteints par une portion donnée des balles. J'avais choisi la proportion du tiers, parce que le côté se rapprochait de la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts.

Ce mode de comparaison était très-convenable, parce qu'il exprimait immédiatement une propriété de l'arme. Ces notions furent appliquées à l'école normale de tir que l'on créait alors à Vincennes, et on adopta depuis, comme terme de comparaison, le rayon du cercle qui renfermait la moitié des coups; mais, cette manière de considérer la justesse, qui s'applique très-bien au tir des projectiles sur une cible verticale, ne s'applique pas au tir des canons ou des mortiers sur un terrain horizontal.

J'avais déjà traité cette dernière question en 1823, et j'étais parvenu, sans analyse, à figurer graphiquement et complétement les résultats du tir des bombes dans les écoles à feu, à représenter la loi des écarts, et le lieu des points d'égale probabilité, et, à déterminer la probabilité d'atteindre un terrain de figure, de dimensions et de position données. Ces résultats recevaient plus tard leur application.

La question mise au concours par le Comité de l'artillerie, en ce qui concerne la proportion des coups à effets au nombre total des coups tirés, sur un objet de formes et de dimensions données, n'était donc pas encore assez complétement traitée ; mais, je l'avais fait en 1847, lorsque je publiais mon Traité de balistique.

Dans ce travail, j'avais donné la règle à suivre pour prendre les moyennes, et la règle de Laplace pour calculer les probabilités que cette moyenne est comprise entre des limites données. Je démontrais cette règle d'une manière assez simple, et je la vérifiais par des applications à des résultats d'expériences. Je donnais la probabilité d'atteindre une surface de forme, de dimensions et de position déterminées, par la seule connaissance des moyens écarts horizontaux ou verticaux. Dans le cas où ces deux quantités étaient égales, il suffisait de connaître la proba-

bilité d'atteindre un rectangle, un cercle, une ellipse de dimensions données pour pouvoir déterminer la probabilité d'atteindre un objet de forme donnée; plusieurs applications confirmaient la théorie.

Cette théorie devait d'abord être comprise dans mon traité de balistique, ainsi que la représentation du mouvement réel des projectiles ; mais cela eût augmenté outre mesure ce traité déjà volumineux ; je dus m'abstenir, et je terminai mon Avant-propos en disant : « Je n'ai pas pu donner, à ce qui concerne « les lois du mouvement réel des projectiles, l'étendue qu'elles « comporteraient. Les résultats d'observations sur lesquelles « elles devraient se fonder sont trop nombreux. Il en est de « même des lois des déviations qui permettraient d'estimer les « chances d'atteindre un but de formes et de dimensions dé- « terminées. L'étendue déjà considérable du traité ne l'a pas « permis. »

Depuis cette époque, des occupations et des travaux de diverses natures ne m'ont pas permis de reprendre la question. Cependant, en 1852, j'avais communiqué quelques parties de ce travail à M. le capitaine d'artillerie Fèvre, professeur à l'École normale de tir à Vincennes, pour faciliter la recherche du moyen écart ; elles ont continué à faire partie de l'enseignement de cette école.

En 1854, M. Hélie, professeur pour l'artillerie de marine à Lorient, a donné (*) des formules pour calculer la probabilité d'atteindre des surfaces de dimensions données. La théorie de ce savant professeur est basée sur la connaissance de la déviation moyenne latérale à la distance que l'on considère, c'est-à-dire sur la moyenne arithmétique des écarts, soit à droite, soit à gauche, et considérés comme positifs ; mais, cette théorie donne lieu à des objections sérieuses qui seront rapportées plus loin (art. 25). Dans le *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*, de M. Liagre (**), il est fait quelques applications de peu d'étendue au tir des armes à feu.

(*) *Mémoire sur la probabilité du tir des projectiles de l'artillerie navale.* Imprimerie impériale, 1854.

(**) Bruxelles, 1852.

Dans le travail que je publie aujourd'hui, j'ai conservé à la loi de déviation son exactitude, et j'arrive à des formules rigoureuses et d'une application très-facile. Cette théorie remplira une lacune importante, et facilitera, je l'espère, l'étude de la justesse du tir des armes et de leurs effets, et les applications immédiates au tir des différentes armes ou bouches à feu. Il ne reste que quelques données à recueillir sur chacune d'elles, ce qui ne présente pas de difficultés, et à reconnaître comment elles varient avec les distances et avec d'autres circonstances ; c'est là un travail distinct.

Je n'ai pas cru devoir exposer ici les notions élémentaires du calcul des probabilités, je renvoie pour cela aux traités spéciaux (*).

---

1. *Considérations générales sur la moyenne des mesures.*

On sait que plusieurs causes de déviation agissent sur les projectiles, et que ceux-ci suivent, à chaque coup, des trajectoires distinctes, et ne frappent pas au même point. Ces causes, qu'on cherche à diminuer autant que les nécessités du service le comportent, empêchent qu'on atteigne sûrement un but proposé ; et il faut que celui-ci ait une certaine étendue pour qu'on ait quelque probabilité de le toucher. Cette étendue doit être d'autant plus grande, que les causes déviatrices sont plus nombreuses, plus puissantes, ou qu'elles agissent plus longtemps, par suite de l'éloignement du but. La probabilité d'atteindre dans chaque cas dépendant nécessairement de la manière dont l'arme sera dirigée, l'on doit naturellement rechercher d'abord la direction qui doit lui donner la plus grande valeur.

Supposons qu'une arme soit chargée d'une manière uniforme et constamment dirigée sur le même point d'un but vertical assez étendu pour être frappé à chaque coup. Les points touchés

(*) Laplace, Lacroix, Poisson, Cournot, Liagre, etc.

ou *points d'impact* paraîtront d'abord fort irrégulièrement répartis, et l'on ne reconnaîtra aucune loi dans leur arrangement; mais, à mesure que le nombre des points frappés ira en augmentant, on verra qu'autour d'un certain point, les points d'impact sont plus rapprochés entre eux que dans les autres parties. Si l'on considère ensuite des parties de la cible également éloignées de l'horizontale qui passe par le point central, les unes au-dessus, les autres au-dessous, on reconnaît que le rapprochement des points d'impact entre eux est sensiblement le même, du moins en général, soit au-dessus, soit au-dessous, et l'on en conclut que les chances d'écartement, dans un sens ou dans l'autre, sont égales.

Si l'on considère les points d'impact relativement à leur distance à une ligne verticale passant par ce même point, on reconnaît également que le degré de rapprochement des points d'impact entre eux diminue à mesure qu'on s'en éloigne.

Pour le moment, ne considérons que la hauteur des points d'impact comme s'ils étaient tous ramenés horizontalement sur la même verticale.

Admettons que le nombre des points d'impact est assez considérable pour qu'il se soit établi une sorte de continuité au-dessus et au-dessous du point central, et comme, en outre, il devra y avoir symétrie, les nombres des points frappés au-dessus et au-dessous seront sensiblement égaux entre eux, et si on mesure la distance de chaque point d'impact au point particulier, c'est-à-dire l'écart de chaque point touché, la somme des écarts en dessus sera égale à la somme des écarts en dessous. Cette condition détermine ainsi, d'après l'ensemble de tous les coups, et d'une manière très-précise, la position du point central.

Pour l'obtenir, il suffit, en effet, de mesurer la hauteur de chaque point au-dessus d'une ligne horizontale prise arbitrairement, de faire la somme des hauteurs et de la diviser par le nombre des points ; on a ainsi la *moyenne arithmétique* des hauteurs ou la hauteur *moyenne;* c'est la hauteur du point cherché, du point désigné par le nom de *point d'impact moyen.*

Si l'on désigne par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les hauteurs de n points

d'impact, au-dessus d'un point pris arbitrairement, et qu'on fasse [1]... $\frac{A_1 + A_2 + \ldots A_n}{n} = m$, ou, en indiquant par le signe Σ la somme des quantités analogues, $\frac{\Sigma A}{n} = m$, qu'ensuite les écarts des divers points d'impact, par rapport au point d'impact moyen, soient désignés par $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$, et que, par conséquent, on ait $a_1 = A_1 - m$, $a_2 = A_2 - m$, ... $a_n = A_n - m$, il est facile de voir que l'on aura $\Sigma a = 0$. Σa étant une somme algébrique, il faut que la somme des écarts positifs, ou des points qui sont au-dessus du point d'impact moyen, soit égale à la somme des écarts négatifs ou des points qui sont au-dessous.

Si le nombre des points d'impact est assez grand, leur répartition, relativement à leur hauteur, aura un caractère suffisant de régularité, et le nombre des points au-dessus du point d'impact moyen sera à très-peu près égal à celui des points situés au-dessous, et le rapport de ces nombres sera très-près de l'unité.

Ce que nous disons de la hauteur des points touchés d'une cible est applicable à ce qui a lieu pour les mesures d'une quantité en général. Il y a cependant à faire cette distinction, qu'ici, l'erreur n'est pas dans la mesure de la hauteur ; elle provient des causes qu'on n'apprécie pas, et qui font varier cette hauteur d'un coup à l'autre.

Dans cette circonstance, on n'a aucune raison de préférer absolument l'une d'elles à toutes les autres, ou d'en rejeter quelques-unes; il est donc très-naturel de prendre la moyenne *arithmétique* de toutes les valeurs, et c'est ce qu'on fait généralement.

2. *Propriétés de la moyenne. — La somme des carrés des écarts est un minimum. — Écart moyen. — Moyen écart.*

La moyenne arithmétique d'un certain nombre de mesures jouit de cette propriété, que la somme des carrés des écarts, relativement à cette moyenne, est un minimum, c'est-à-dire que, rapportés à toute autre mesure ou hauteur, la somme des carrés des écarts serait plus grande.

En effet, si l'on considère une hauteur quelconque P, soit $A_1, A_2 \ldots$ les mesures observées, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ les écarts ou erreurs des mesures observées rapportés à P, ce qui donne $\varepsilon_1 = A_1 - P$,

$\varepsilon^2 = A_2 - P\ldots$, on obtient facilement, en faisant $\frac{\Sigma A}{n} = m$,

$$[2] \qquad \Sigma\varepsilon^2 = \Sigma A^2 - n\,m^2 + n(P-m)^2$$

Les deux premiers termes du second membre étant indépendants de P, la valeur de $\Sigma\varepsilon^2$ ne varie qu'avec $(P-m)^2$, qui est toujours positive; elle atteindra donc son minimum pour $P=m$. Dans ce cas (art. 1), $\varepsilon_1 = a_1, \varepsilon_2 = a_2 \ldots$ et l'on a

$$[3] \qquad \Sigma a^2 \text{ ou } \Sigma(A-m)^2 = \Sigma A^2 - nm^2$$

Cette formule fournit un moyen d'avoir la somme des carrés des écarts rapportés à la moyenne, sans déterminer les écarts particuliers à celle-ci; on a aussi $\frac{\Sigma a^2}{n} = \frac{\Sigma A^2}{n} - \left(\frac{\Sigma A}{n}\right)^2$. Cette observation est importante, parce que, lorsqu'on a un grand nombre d'observations de A, il est long de former les différences $A_1 - m$, $A_2 - m$,... pour en calculer ensuite les carrés; cela sera généralement d'autant plus long, que la valeur de m étant obtenue avec un degré d'approximation plus grand que les observations, les différences comporteront plus de chiffres. Si les hauteurs $A_1, A_2 \ldots$ étaient grandes, relativement aux valeurs de $a_1, a_2 \ldots$ on simplifierait les calculs en rapportant toutes les mesures à une hauteur arbitraire rapprochée de m, c'est-à-dire en retranchant de ces mesures une certaine valeur choisie en nombre rond.

Réciproquement, ayant Σa^2 rapportée à la hauteur moyenne m, on aura la somme des carrés des écarts ε rapportés à une hauteur $P = m + d$, en remarquant que $\Sigma a = 0$, par la formule :

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma(a-d)^2 = \Sigma a^2 + n\,d^2$$

ou

$$\frac{\Sigma(a-d)^2}{n} = \frac{\Sigma a^2}{n} + d^2.$$

La quantité $\frac{\Sigma a^2}{n}$, ou la moyenne des carrés des écarts, qui se rencontrera souvent dans les calculs, sera remplacée par k^2, et l'on aura $k^2 = \frac{\Sigma a^2}{n}$ ou $k = \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{n}}$; et, par suite :

$$[4] \qquad \frac{\Sigma(a-d)^2}{n} = k^2 + d^2 \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{\Sigma(a-d)^2}{n} - d^2.$$

La quantité k indique, par sa grandeur, l'écartement plus ou

moins grand des mesures prises ou des hauteurs observées ; il ne faut pas la confondre avec la moyenne arithmétique des écarts, pris *positivement*, relatifs à la hauteur moyenne ; cette moyenne indique aussi le degré plus ou moins grand des divergences des observations entre elles ; elle est même assez généralement employée pour le représenter. On l'a appelé *écart moyen* ; nous devons lui conserver son nom ; mais, on pourrait y ajouter le mot linéaire, ou le mot *arithmétique*, parce qu'il se rapporte à la première puissance des écarts. L'autre se rapporte à la seconde puissance des écarts, et l'on pourrait le distinguer par l'addition du mot aré (de *area*, superficie), ou du mot *quadratique* ; nous l'appellerons le *moyen écart*. L'écart moyen (linéaire) ou arithmétique, et le moyen écart (aré) ou quadratique, ont entre eux des rapports nécessaires, dont il sera question plus loin (art. 26, 29).

3. ***Probabilité que la moyenne prise sur un certain nombre de mesures ne s'écarte de la valeur exacte que d'une quantité donnée.***

La moyenne des grandeurs observées $m = \frac{\Sigma A}{n}$ est, comme on l'a dit, la mesure de la grandeur cherchée, celle qui laisse le moins de chances d'erreur, mais non pas une mesure certaine. On voit facilement que plus les observations qui donnent la valeur de A ont été répétées, ou moins ces valeurs s'écartent les unes des autres, plus la moyenne qu'on obtient s'approche de la vraie valeur; on voit aussi que, dans ce cas, une autre combinaison, qui écarterait une ou plusieurs des valeurs, soit les plus grandes, soit les plus petites, n'apporterait qu'une très-faible variation dans la moyenne ; mais cela ne suffit pas. Il est important de connaître la limite des erreurs qu'on peut avoir à craindre; le calcul des probabilités en donne le moyen (*).

Laplace a fait voir que, quand le nombre des observations est assez grand, la grandeur de cette limite dépend de la valeur du moyen écart k, et qu'il y a une certaine probabilité p,

---

(*) *Théorie analytique des probabilités* de Laplace ;— *Mémorial d'artillerie*, n° 3, pag. 141 ; — *Formules de probabilité*; par Poisson.

que l'erreur à craindre, en prenant m pour la valeur cherchée, sera comprise entre les limites $\pm\sqrt{\frac{2}{n}}\,\alpha k$, ou, autrement dit, que si M est la véritable valeur cherchée, il y aura cette probabilité p, que la différence $M-m$ ne surpassera pas $\sqrt{\frac{2}{n}}\,\alpha k$, estimée indépendamment du signe. α est ici un coefficient numérique qui dépend seulement de la valeur de p; nous représenterons cette valeur par $\varphi(\alpha)$. Celle-ci, lorsque n est un grand nombre et qu'on néglige les quantités de l'ordre de la fraction $\frac{1}{n}$, est donnée par la relation

$$[5] \qquad p=\varphi(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2}\,dt.$$

dans laquelle e est la base des logarithmes népériens et π le rapport de la circonférence au diamètre.

Nous donnons ici la formule de Laplace sans démonstration. Cette question a été traitée sous le nom Méthode des moindres carrés, par Legendre, Gauss, Laplace, Poisson, par MM. Bienaymé, Cournot, J. Bertrand, etc.

On a calculé des tables de $\varphi(\alpha)$ (voir à la fin de l'ouvrage) (*), desquelles l'on déduit p, lorsqu'on a α, et, réciproquement, α lorsqu'on a p. Ayant α, on aura la limite des erreurs à craindre $s=\alpha\sqrt{\frac{2}{n}}\,k$ et réciproquement, ayant la limite s en la divisant par $\sqrt{\frac{2}{n}}\,k$, on aura α, et par suite, la probabilité de ne pas dépasser cette limite.

D'après cette table, on voit que la valeur de p approche rapidement de l'unité, à mesure que α augmente; et, pour une valeur peu considérable de α, celle de p diffère peu de l'unité ou de la certitude.

(*) Voir, à la fin de *l'Analyse des réfractions astronomiques* de Kramp, une table dont on déduit facilement les valeurs numériques de p en fonction de α. Voir aussi la table donnée par M. Cournot.

Dans la table donnée par Poisson, dans le *Mémorial d'artillerie*, n° 3, il y a une erreur sur la valeur de p correspondante à $2\alpha=5{,}0$.

Pour une probabilité donnée, l'erreur à craindre décroîtra proportionnellement au moyen écart; elle est donc d'autant moindre que les grandeurs variables obtenues seront moins différentes les unes des autres ou qu'elles s'écarteront moins de leur moyenne; on reconnaît facilement que cette condition est le signe de bonnes observations, mais le calcul des probabilités pouvait seul en donner la mesure.

L'erreur à craindre décroît à mesure que le nombre des observations augmente. Le décroissement est en raison inverse de la racine carrée de ce nombre.

Réciproquement, si l'on fait varier le nombre α avec le nombre n, et que le premier reste proportionnel à la racine carrée du second, les limites s de l'erreur sont constantes; mais la probabilité p, qui dépend de α, croît de plus en plus, en même temps que n, c'est-à-dire qu'il est de plus en plus probable que l'erreur à craindre sur le résultat moyen tombera entre des limites données.

Les formules précédentes seront d'autant plus exactes, que le nombre n sera plus grand. On pourra encore les employer avec utilité dans le service de l'artillerie, lorsqu'on aura seulement dix mesures d'une même chose; mais, suivant Poisson (*), pour de moindres nombres d'observations, le calcul des probabilités ne fournit plus le moyen d'évaluer avec assez de précision les limites de l'erreur à craindre, en prenant leur résultat moyen pour la valeur qu'on cherche; nous donnerons plus loin des explications à ce sujet.

Ces formules conviennent au cas où les différences entre les résultats donnés par l'expérience proviennent, non pas seulement d'erreurs d'observations, mais bien aussi de causes déviatrices de toute espèce, et qu'on regarde comme accidentelles. Chaque valeur trouvée, telle que la portée d'un boulet, ou la hauteur du point frappé d'une cible, diffère plus ou moins des autres, sans que l'erreur provienne des mesures mêmes; c'est une valeur véritable dépendant de ces causes. Mais, parmi toutes les valeurs qu'on peut obtenir, on suppose qu'il en est une telle

---

(*) *Mémorial d'artillerie*, n° 3, pag. 146.

que deux écarts égaux, l'un en plus, l'autre en moins, sont également probables dans chaque observation ; c'est cette valeur, ainsi définie, qu'on regarde comme la vraie valeur cherchée; c'est celle dont le résultat moyen d'un grand nombre d'observations approche de plus en plus à mesure que leur nombre augmente.

Ces formules s'appliqueront également au cas des observations des coups touchant à droite ou à gauche de la ligne verticale tracée sur une cible, et sur laquelle on dirige les coups, ou de la trace sur le terrain du plan vertical mené par l'axe de la bouche à feu ; elles serviront à déterminer l'influence d'une cause qui ferait dévier les projectiles hors du plan vertical, tel que le vent, lorsqu'il agit latéralement ; elles donneront l'effet moyen de cette cause, si elle existe, et l'erreur qu'on peut avoir à craindre sur la mesure de cet effet.

On pourra, par là aussi, trouver la probabilité que la cause existe réellement, en cherchant, d'après la somme des carrés des écarts, quelle est la probabilité que la moyenne observée ne s'éloigne de la véritable que d'une quantité inférieure à cette moyenne; celle-ci devant être nulle s'il n'y a pas de force déviatrice.

C'est aussi de cette manière qu'on pourra reconnaître s'il y a dans l'arme une cause déviatrice latérale, telle qu'est la rayure en hélice des armes, ou une ligne de mire non parallèle au plan vertical du tir.

4. *Applications de la formule de Laplace.*

Dans des expériences faites à Metz, en 1846, pour la détermination des trajectoires des boulets (*), il a été tiré 100 boulets de 16 à la charge de poudre de $1^k 333$, sous une inclinaison constante, et les hauteurs A_1, A_2..... de chacun d'eux, ainsi que leurs écarts du plan vertical de l'axe de la bouche à feu, ont été observés sur des cibles en ficelle, aux distances de 200^m, 400^m et 600^m.

(*) 11e Rapport de la Commission des principes du tir, adressé à M. le Ministre de la guerre, le 3 février 1847. (Voir l'extrait à la fin.)

Les hauteurs moyennes $m = \frac{\Sigma A}{n}$ à ces trois distances rapportées au centre de la bouche à feu, ont été respectivement : $m = 3^m917$; $m = 4^m505$; $m = -0^m003$. En retranchant ces hauteurs moyennes, sur 100 observations, des hauteurs observées à chaque coup, on a eu les écarts en hauteurs; a_1, a_2 ...; on en a pris les carrés et on en a fait la somme Σa^2. On a divisé cette somme par 100 pour en avoir la moyenne $k^2 = \frac{\Sigma a^2}{n}$, enfin on a extrait la racine carrée de cette moyenne, ce qui a donné le moyen écart k; cette quantité, aux distances de 200^m, 400^m, 600^m a été respectivement $k = 0^m4071$, $k = 1^m061$, $k = 1^m672$.

D'après cela, pour connaître quelle est à 200^m l'erreur probable à craindre, celle dont la probabilité est un demi, on remarquera qu'à $p = 0,5$ répond, dans la table des valeurs de $\varphi(\alpha)$, $\alpha = 0,4769$, et comme $n = 100$, l'erreur à craindre $\pm \alpha \sqrt{\frac{2}{n}}\, k$ est $\pm 0,4769 \sqrt{\frac{2}{100}} . 0^m4071$, ou $0,06744 . 0^m4071 = \pm 0^m02746$; c'est-à-dire qu'il y a 1 contre 1 à parier que la hauteur moyenne 3^m917 ne s'écarte pas de plus de 0^m02746 de la valeur véritable, ou de la moyenne résultant d'un nombre extrêmement grand de boulets tirés dans les mêmes circonstances. Aux distances de 400^m et 600^m, l'erreur à craindre serait respectivement $0,06744.\ 1^m061 = 0^m0716$ et $0,06744.\ 1^m672 = 0^m113$.

A la distance de 200^m, la limite des écarts qui correspondent à la probabilité $p = 0,9$, pour laquelle $\alpha = 1,165$, sera $1,165 \sqrt{\frac{2}{100}} . 0^m4071 = 0^m0670$; c'est-à-dire qu'il y a 9 à parier contre 1 que l'erreur, sur la moyenne hauteur 3^m917 ne dépassera pas 0^m0670. Aux distances de 400^m et de 600^m, les limites des écarts qui présentent cette même probabilité sont respectivement 0^m175 et 0^m275.

La limite des écarts qui, à 200^m, correspondent à la probabilité $p = 0,99$, pour laquelle $\alpha = 1,8214$, sera

$$1,8214 \sqrt{\frac{2}{100}} . 0^m4071 = 0^m105;$$

c'est-à-dire qu'il y a 99 à parier contre 1 que le résultat moyen ne s'écarte pas de la valeur véritable de plus de 0ᵐ105. Aux distances de 400ᵐ et 600ᵐ cette limite serait respectivement 0ᵐ273 et 0ᵐ431.

La limite qu'on a la presque certitude de ne pas dépasser, s'obtiendra en faisant $p=0,999$, ce qui donne $\alpha=1,327$, et qui, à 200ᵐ, donnera $2,327\sqrt{\frac{2}{100}}$. 0ᵐ4071 ; $=0,134$ c'est-à-dire qu'il y a 999 à parier contre 1 que la moyenne 3ᵐ,917 ne s'écarte pas de la hauteur véritable de plus de 0ᵐ134. Aux distances de 400ᵐ et de 600ᵐ, les limites des erreurs également probables, sont respectivement 0ᵐ350 et 0ᵐ550.

Si, à l'inverse, on veut déterminer quelle est la probabilité que la valeur moyenne à la distance de 200ᵐ est donnée par les observations à 0ᵐ050 près, on devra avoir

$$0^m05=\alpha\sqrt{\frac{2}{100}}\ 0^m4071,$$

ce qui donne $\alpha=0,868$, qui correspond (voir la table) à $p=0,7804$; c'est-à-dire qu'il y a 78 à parier contre 22, ou à très-peu près 7 contre 2, que la moyenne observée ne s'écarte pas de plus de 0ᵐ05 de la valeur véritable. A la distance de 400ᵐ on trouve $\alpha=0,333$, d'où $p=0,362$, et à 600ᵐ $\alpha=0,212$ d'où $p=0,236$; c'est-à-dire qu'il y a à parier respectivement 362 contre 638, ou 4 contre 7, et 236 contre 764, ou 5 contre 16, qu'à 400ᵐ et à 600ᵐ, les moyennes trouvées ne s'écartent pas de plus de 0ᵐ05 de la valeur véritable.

Pour faciliter les applications de la formule de Laplace, nous avons calculé une table des produits de $\alpha\sqrt{\frac{2}{n}}$ pour les diverses valeurs de α correspondantes aux probabilités $p=0,05$, $p=0,10\ldots$, $p=0,99$, $p=0,999$, placées sur autant de lignes horizontales et, pour une série de valeurs de n dans autant de colonnes verticales, depuis 7, 8, 9 jusqu'à 1000, et inégalement espacées. A l'aide de ce tableau qui donne ainsi la limite des écarts en fractions du moyen écart, étant donnés le nombre des observations faites et la probabilité de l'écart à calculer, on trouvera sur la ligne horizontale indiquée par p et dans la ligne verticale indiquée par n, le nombre qui multiplié par ce moyen

écart donnera la limite cherchée des écarts. Ainsi, pour $p=0,50$ et $n=100$ on trouvera 0,0674 ; ce nombre, multiplié par le moyen écart de 100 observations rapportées à la grandeur moyenne, donnera l'écart probable à craindre sur cette moyenne.

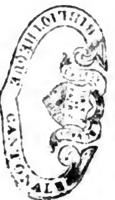
Si les données ne se trouvent pas exactement dans la colonne des probabilités inscrites ou dans les nombres d'observations indiqués dans l'en-tête, on opérera par les parties proportionnelles.

Si, à l'inverse, l'inconnue était la probabilité, en divisant la limite s de l'écart par le moyen écart k, on aurait la limite $\frac{s}{k}$ rapportée au moyen écart, pris pour unité ; en descendant dans la colonne relative à n, jusqu'au nombre égal à $\frac{s}{k}$, l'on trouve, dans la ligne horizontale, la valeur de p qui y correspond ; au besoin, on opérera par les parties proportionnelles, d'abord en ce qui concerne n, de manière à avoir deux nombres qui comprennent $\frac{s}{k}$; et ensuite pour avoir p. On opérerait d'une manière analogue, si le nombre des observations était l'inconnue.

On n'a pas calculé ce tableau pour des nombres d'observations inférieurs à 7, de crainte que la formule ne fût plus assez exacte. On s'est également arrêté à un nombre de décimales qui suffira dans les applications au tir des projectiles.

TABLEAU *de la limite des écarts dont la probabilité est donnée ainsi que le nombre des observations; le moyen écart étant pris pour unité.*

NOMBRE des Observations. / Probabilité.	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	50	75	100	200	500	1000
0,05	0,0237	0,0222	0,0209	0,0198	0,0181	0,0162	0,0140	0,0125	0,0114	0,0099	0,0089	0,0072	0,0063	0,0044	0,0028	0,0020
0,10	0,0474	0,0444	0,0419	0,0397	0,0362	0,0324	0,0281	0,0251	0,0229	0,0199	0,0177	0,0145	0,0126	0,0089	0,0056	0,0040
0,15	0,0714	0,0669	0,0630	0,0597	0,0545	0,0488	0,0423	0,0378	0,0345	0,0299	0,0267	0,0218	0,0189	0,0134	0,0085	0,0060
0,20	0,0957	0,0896	0,0844	0,0801	0,0731	0,0654	0,0566	0,0506	0,0462	0,0400	0,0358	0,0292	0,0253	0,0179	0,0113	0,0080
0,25	0,1203	0,1127	0,1063	0,1008	0,0919	0,0822	0,0712	0,0636	0,0581	0,0503	0,0451	0,0368	0,0319	0,0225	0,0142	0,0101
0,30	0,1456	0,1362	0,1285	0,1218	0,1112	0,0994	0,0860	0,0769	0,0702	0,0609	0,0545	0,0445	0,0385	0,0272	0,0172	0,0122
0,35	0,1714	0,1604	0,1513	0,1434	0,1308	0,1171	0,1014	0,0906	0,0827	0,0717	0,0642	0,0523	0,0454	0,0321	0,0203	0,0143
0,40	0,1982	0,1854	0,1749	0,1657	0,1512	0,1353	0,1172	0,1048	0,0956	0,0828	0,0742	0,0605	0,0524	0,0371	0,0234	0,0166
0,45	0,226	0,211	0,1993	0,189	0,1723	0,1542	0,1336	0,1194	0,1090	0,0944	0,0845	0,0690	0,0598	0,0423	0,0267	0,0189
0,50	0,255	0,238	0,225	0,213	0,1945	0,1744	0,1507	0,1348	0,1230	0,1066	0,0954	0,0778	0,0674	0,0477	0,0301	0,0213
0,55	0,285	0,267	0,252	0,239	0,2180	0,1950	0,1688	0,1510	0,1378	0,1183	0,1068	0,0872	0,0755	0,0534	0,0338	0,0239
0,60	0,318	0,298	0,281	0,266	0,243	0,2172	0,1880	0,1682	0,1535	0,1330	0,1190	0,0971	0,0841	0,0595	0,0376	0,0266
0,65	0,353	0,330	0,314	0,296	0,270	0,241	0,209	0,1867	0,1707	0,1477	0,1322	0,1078	0,0934	0,0661	0,0418	0,0296
0,70	0,394	0,366	0,346	0,328	0,299	0,267	0,232	0,207	0,189	0,1638	0,1466	0,1197	0,1036	0,0733	0,0464	0,0328
0,75	0,435	0,407	0,384	0,363	0,332	0,297	0,257	0,230	0,210	0,1818	0,1627	0,1328	0,1150	0,0813	0,0514	0,0363
0,80	0,481	0,453	0,427	0,405	0,370	0,331	0,286	0,256	0,234	0,2025	0,1812	0,1480	0,1281	0,0906	0,0572	0,0405
0,85	0,544	0,509	0,480	0,455	0,415	0,374	0,324	0,288	0,263	0,2275	0,2036	0,1662	0,1440	0,1018	0,0648	0,0455
0,90	0,622	0,582	0,549	0,520	0,475	0,425	0,368	0,329	0,300	0,260	0,233	0,190	0,165	0,1163	0,0736	0,0520
0,95	0,744	0,693	0,653	0,620	0,567	0,506	0,438	0,391	0,358	0,310	0,277	0,226	0,196	0,1386	0,0876	0,0613
0,99	0,974	0,914	0,859	0,806	0,743	0,665	0,575	0,515	0,470	0,407	0,364	0,297	0,258	0,1821	0,1150	0,0806
0,999	1,243	1,163	1,098	1,040	0,949	0,849	0,735	0,658	0,599	0,520	0,465	0,380	0,329	0,2327	0,1470	0,1040



5. *Vérification de la règle de Laplace.*

Pour vérifier la règle de Laplace, nous allons considérer les résultats des observations des hauteurs des boulets de 16 tirés au nombre de 100, sous la même inclinaison, avec la même charge de poudre, et dont les écarts ont été observés à 200^m, 400^m et 600^m, et à leur point de chute sur le terrain (*). Nous avons pris les moyennes sur 10 coups, sur 20 coups, pour les comparer aux moyennes sur 100 coups, que l'on peut regarder comme suffisamment exactes; nous pourrons ainsi reconnaître si les différences, effectivement observées dans ces moyennes, sont comprises, en nombres voulus, dans les limites indiquées par les formules de probabilités, et par conséquent si la probabilité de la limite de cette erreur est exactement indiquée. Les résultats de cette comparaison sont exposés dans le tableau ci-après. Nous en citons quelques-uns pour exemple.

Dans le tir du canon de 16 à la distance de 200^m, la hauteur moyenne du boulet sur les 100 coups a été de 3^m917, la moyenne sur les dix premiers coups a été 3^m70. La première étant regardée comme exacte, ou comme ne présentant qu'une différence négligeable, la seconde présente une erreur de 0^m22. Or, pour ces dix hauteurs, la valeur de $k = \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2}{n}}$, ou le moyen écart, étant 0^m582, on trouvera que, pour la probabilité $p = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = 0{,}477$, la limite de l'erreur sera $\sqrt{\frac{2}{10}}\, 0{,}477 . 0{,}582 =$ 0^m124; la quantité trouvée 0^m22, sort donc des limites données.

Dans la seconde série de 10 hauteurs, la moyenne est 3^m91, elle est inférieure de moins de 0^m01 à la valeur exacte de 3^m917. Or, les différences de ces 10 hauteurs avec 3^m91 donnent $k = 0^m326$, et, pour $p = \frac{1}{2}$, une limite d'erreur égale à 0^m07; la quantité trouvée, 0^m01, est donc en dedans des limites calculées; en continuant de même pour les 10 séries de 10 coups, on trouve que la différence effective est cinq fois en dedans des limites, et cinq fois en dehors; on a donc la probabi-

(*) Rapport de la commission des principes du tir de Metz, adressé à M. le Ministre de la guerre, le 3 février 1847.

lité $\frac{1}{2}$ que la hauteur moyenne résultant de dix observations ne sort pas de la limite indiquée par la valeur de k, ce qui est la confirmation de la formule.

On a fait la même opération pour les hauteurs observées aux distances de 400^m et 600^m, et ensuite on a fait l'application des mêmes formules aux limites qui correspondent aux probabilités $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{10}$. Les résultats en sont insérés dans le tableau ci-après, où l'on a indiqué, par le signe $+$, les comparaisons où la différence observée était dans la limite calculée, et par le signe — les comparaisons dans lesquelles la différence observée était en dehors de cette limite.

TABLEAU *comparatif des moyennes sur 10 observations, et sur 100 observations; limite de l'erreur que l'on peut commettre et probabilité.*

DISTANCES.	oyennes sur 100 obser-vations.	Moyennes sur 10.	ERREURS des moyennes particulières.	VALEURS de k.	LIMITES pour $p=\frac{1}{2}$ $\alpha=0,477$.	COMPARAISON.		LIMITES pour $p=\frac{4}{5}$ $\alpha=0,9062$.	COMPARAISON.		LIMITES pour $p=\frac{9}{10}$ $\alpha=1,1631$.	COMPARAISON.	
						En dedans.	En dehors.		En dedans.	En dehors.		En dedans.	En dehors.
m.	m.	m.	m.	m.	m.			m.			m.		
		3,70	0,22	0 582	0,124		—	0,164		—	0,211		—
		3,91	0,01	0,326	0,070	+		0,133	+		0,171	+	
		3,94	0,02	0,439	0,094	+		0,179	+		0,230	+	
		4,00	0,08	0,467	0,100*	+		0,190	+		0,245	+	
200	3,917	3,83	0,11	0,291	0,063		—	0,119*	+		0,153*	+	
		4,02	0,10	0,408	0,088		—	0,167	+		0,215	+	
		3,87	0,05	0,365	0,078	+		0,149	+		0,192	+	
		4,02	0,10	0,231	0,071		—	0,135	+		0,173	+	
		4,02	0,10	0,375	0,081		—	0,153	+		0,197	+	
		3,86	0,06	0,343	0,074	+		0,140	+		0,180	+	
		4,22	0,08	1,293	0,278	+		0,530	+		0,680	+	
		4,30	0,00	0,938	0,202	+		0,383	+		0,493	+	
		4,31	0,01	1,354	0,291	+		0,553	+		0,710	+	
		4,09	0,21	1,139	0,245*	+		0,465	+		0,598	+	
400	4,305	4,23	0,07	0,731	0,157	+		0,299	+		0,385	+	
		4,42	0,11	1,074	0,231	+		0,439	+		0,564	+	
		4,29	0,02	0,884	0,190	+		0,361	+		0,464	+	
		4,41	0,10	0,780	0,168	+		0,318	+		0,410	+	
		4,66	0,35	0,957	0,201		—	0,383*	+		0,492*	+	
		4,12	0,19	0,747	0,160		—	0,305	+		0,392	+	
		0,04	0,04	1,835	0,395	+		0,750	+		0,965	+	
		0,04	0,04	1,550	0,333	+		0,633	+		0,815	+	
		0,48	0,48	1,565	0,337		—	0,640	+		0,821	+	
		−0,15	0,15	2,133	0,458	+		0.872	+		1,120	+	
600	−0,003	−0,38	0,38	1,364	0,293		—	0,557	+		0,747	+	
		0,05	0,05	1,706	0,407	+		0,775	+		0,995	+	
		−0,51	0,51	1,574	0,338		—	0.643*	+		0,825	+	
		0,19	0,19	1,075	0,231*	+		0,440*	+		0,565	+	
		0,56	0,56	1,513	0,326		—	0,619*	+		0,795	+	
		−0,45	0,15	1,676	0,361		—	0,685	+		0,880	+	

D'après ce tableau, on voit qu'en déterminant une hauteur par la moyenne arithmétique de dix hauteurs observées aux distances de 200m et 600m, la limite de l'erreur à craindre calculée pour la probabilité $\frac{1}{2}$ a été plus grande que la différence observée cinq fois sur dix ; à la distance de 200m pour la probabilité $\frac{9}{10}$, elle l'a été une foie sur dix, ce qui est exactement conforme aux formules.

A la distance de 400m, pour la probabilité $\frac{1}{2}$, la hauteur moyenne sur 10 coups n'est sortie des limites assignées par la formule que 2 fois sur 10, au lieu de 5, et à la distance de 200m, pour la probabilité $\frac{4}{5}$, que 1 fois sur 10, au lieu de 2. Aux distances de 400m et de 600m, pour les probabilités $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{10}$, les hauteurs moyennes observées ne sont pas sorties des limites assignées.

Il résulte de cette comparaison que les limites, calculées par la formule de Laplace, des erreurs qu'on peut commettre, en prenant les moyennes sur 10 coups, comprennent les écarts réels de ces moyennes, comparées à la moyenne générale sur 100 coups, que nous regardons comme exacte, en proportion plus grande que ne l'indiquerait la probabilité correspondante à ces limites. On peut donc admettre, au moins dans le cas du tir, le résultat de la formule comme une limite supérieure. On reconnaît aussi que, sur 30 applications, l'erreur a été inférieure à la limite calculée 18 fois au lieu de 15, pour la probabilité $\frac{1}{2}$, et qu'elle l'a été 29 fois au lieu de 24, pour la probabilité $\frac{4}{5}$, et 29 fois au lieu de 27, pour la probabilité $\frac{9}{10}$.

On reconnaît de même qu'on aurait pu réduire la limite calculée, et, par conséquent, la valeur de α qui correspond à $p=\frac{1}{2}$, à 0,80 de sa grandeur, et qu'on eût eu encore la probabilité $\frac{1}{2}$ que la moyenne fût dans les limites d'erreur indiquées par la formule.

On reconnaît également que, pour les probabilités $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{10}$, les limites calculées eussent pu être réduites respectivement à 0,75 et 0,71 de leur valeur (*).

(*) Les nombres marqués d'un astérisque, dans le tableau précédent, désignent ceux pour lesquels le signe de la différence changerait, si l'on réduisait les limites dans le rapport qu'on indique ici.

Cette comparaison fait voir que les formules qui donnent la probabilité et la limite de l'erreur à craindre sur la moyenne des observations peuvent être appliquées à des nombres qui ne sont pas supérieurs à 10, ce qui confirme l'opinion de Poisson (*) citée plus haut ; elle fait même voir qu'à partir de la probabilité 0,5, on pourrait l'appliquer à des nombres moindres d'observations, tels que 8 ou 7.

Le peu d'incertitude qui reste sur la valeur moyenne, lorsqu'on la prend sur 100 coups, ne peut produire une différence bien sensible dans les rapports auxquels nous sommes arrivés, parce que si une augmentation, par exemple, diminue les différences avec les moyennes plus grandes, elle les augmente avec les moyennes plus petites, et que sur un nombre suffisant, la compensation s'établit sensiblement.

Nous avons fait la même application aux mêmes observations des hauteurs du boulet de 16, en prenant les moyennes sur des séries de 20 hauteurs pour les probabilités 0,5 et 0,8, les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

(*) *Mémorial d'artillerie*, n° 3, pag. 146.

TABLEAU *comparatif des moyennes sur* 20 *observations, comparées à la moyenne sur* 100 ; *limite de l'erreur que l'on peut commettre, et probabilité.*

DISTANCES du but.	HAUTEURS moyennes sur 100.	MOYENNES sur 20 coups.	DIFFÉRENCE avec la moyenne sur 100.	VALEURS de k.	LIMITES dont $p=\frac{1}{2}$ $\alpha=0,477$.	COMPARAISON. En dedans.	COMPARAISON. En dehors.	LIMITES dont $p=\frac{4}{5}$ $\alpha=0,9063$.	COMPARAISON. En dedans.	COMPARAISON. En dehors.
m.	m.	m.	m.	m.	m.			m.		
		3,805	−0,112	0,485	0,073		—	0,119 *	+	
		3,97	+0,053	0,454	0,068 *	+		0,131 *	+	
200	3,917	3,925	+0,012	0,367	0,055	+		0,105	+	
		3,945	+0,028	0,318	0,048 *	+		0,092	+	
		3,94	+0,023	0,368	0,055	+		0,106	+	
		4,26	−0,045	1,131	0,171	+		0,325	+	
		4,20	−0,105	1,335	0,202	+		0,383	+	
400	4,305	4,325	+0,020	0,955	0,144	+		0,272	+	
		4,35	+0,045	0,857	0,129	+		0,246	+	
		4,39	+0,085	0,968	0,146 *	+		0,278	+	
		0,04	+0,043	1,694	0,255	+		0,487	+	
		0,165	+0,168	1,915	0,289 *	+		0,550	+	
600	−0,003	−0,165	−0,.62	1,565	0,236 *	+		0,449	+	
		−0,160	+0,157	1,456	0,217 *	+		0,443 *	+	
		/0,055	+0,058	1,666	0,251	+		0,478	+	

Le résultat contenu dans le tableau qui précède fait voir que, pour la probabilité $\frac{1}{2}$, sur 15 moyennes, il n'y en a qu'une qui ait dépassé la limite correspondante, et que 14 se sont trouvées comprises dans les limites ; ainsi, la probabilité que l'erreur ne sortirait pas de ces limites est effectivement plus grande que $\frac{1}{2}$ et on aurait pu réduire ces limites au-dessous de 0,58 de leur grandeur.

De même, pour la probabilité $\frac{4}{5}$, sur les 15 applications, la limite est supérieure ou égale aux diverses erreurs observées, et on reconnaît de plus que la limite pourrait être réduite à environ 0,36 de la grandeur donnée par la formule.

Par conséquent, avec les moyennes prises sur 20 observations, la limite des erreurs que l'on a effectivement à craindre n'atteint pas celle qui est donnée par les formules, et elle aurait même pu être réduite à environ 0,6 de sa grandeur pour la probabilité $\frac{1}{2}$, et à 0,4 pour la probabilité $\frac{4}{5}$.

Cette comparaison est encore plus favorable à l'application de la formule de Laplace que celle qui se rapporte aux moyennes sur 10 observations.

6. *Moyenne entre plusieurs résultats moyens.*

Lorsqu'une valeur moyenne doit être déduite de diverses séries d'expériences, il faut y faire concourir celles-ci de manière qu'elles laissent la moindre chance d'erreur sur la moyenne générale.

Supposons que n observations de la hauteur d'un projectile, $A_1, A_2, A_3 \ldots$ aient donné $m = \frac{\Sigma A}{n}$, que n' autres A'_1, A'_2, A'_3 aient donné $m' = \frac{\Sigma A'}{n'}$, et que, pour n'' autres A''_1, A''_2, A''_3, on ait $m'' = \frac{\Sigma A''}{n}$. Supposons aussi, d'abord, que les armes sont également régulières, les tireurs également adroits, et les autres circonstances également favorables ; il est évident qu'on pourra confondre les observations des trois séries ensemble, et n'en

former qu'une seule de $n+n'+n''$ observations, la moyenne générale M sera $M = \frac{\Sigma A + \Sigma A' + \Sigma A''}{n+n'+n''}$, ou

$$[6] \quad M = \frac{nm + n'm' + n''m''}{n+n'+n''}.$$

Chaque moyenne particulière m, m', m'', entre ainsi dans la moyenne générale avec une importance proportionnelle au nombre d'observations supposées également précises.

L'égalité dans la précision des observations ressortira de l'égalité ou d'une différence négligeable entre les moyens écarts respectifs rapportés aux hauteurs moyennes m, m', m'', ou entre les quantités désignées par k, k', k'', déduites des valeurs $k^2 = \frac{\Sigma a^2}{n}$, $k'^2 = \frac{\Sigma a'^2}{n'}$, $k''^2 = \frac{\Sigma a''^2}{n''}$.

Si les nombres n, n', n'' étaient égaux, la moyenne se réduirait à $\frac{m+m'+m''}{3}$.

Si le tireur qui a fourni la seconde série d'observations est moins adroit que le premier, ou si d'autres circonstances sont moins favorables, les chances d'erreur dans la valeur m' seront plus grandes, et cette valeur de m' devra avoir moins d'influence; elle devra peser d'un moindre poids dans la détermination de la moyenne M; cette prépondérance est facile à établir.

La probabilité p d'un écart ou d'une erreur à craindre étant donnée par la relation $p = \varphi(\alpha)$, l'écart est égal à $\alpha \sqrt{\frac{2}{n}}k$; p ne variant qu'avec α, restera le même tant que $\sqrt{\frac{2}{n}}k$ ou $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n}{k^2}}}$ ne changera pas; la moyenne m laissera alors les mêmes erreurs à craindre. La valeur de k^2 entre ainsi en raison inverse de n, ou, celle de k en raison inverse de $\sqrt{n}$. Ce n'est donc plus seulement en raison du nombre n qu'un résultat moyen doit peser dans la détermination de la moyenne, mais bien en raison de la quantité $\frac{n}{k^2}$; de même, la seconde série

pèserait en raison de $\frac{n'}{k'^2}$, et la troisième en raison de $\frac{n''}{k''^2}$. On pourrait donc remplacer la série des n' observations par des observations qui auraient donné un moyen écart égal à k, et dont le nombre eût été N' égal à n' multiplié par le rapport $\frac{k^2}{k'^2}$ ou $N' = n' \frac{k^2}{k'^2}$; car on aurait $\frac{n'}{k'^2} = \frac{N'}{k^2}$.

La moyenne m' doit donc entrer dans la détermination de M, comme provenant de N' observations, de même poids que les premières. Il en sera de même en ce qui regarde la troisième série d'observations; d'après cela, la moyenne la plus probable et celle qui doit être adoptée sera :

$$M = \frac{nm + N'm' + N''m''}{n + N' + N''} = \frac{\frac{n}{k^2}m + \frac{N'}{k^2}m' + \frac{N''}{k^2}m''}{\frac{n}{k^2} + \frac{N'}{k^2} + \frac{N''}{k^2}}$$

ou

$$[7] \qquad \frac{\frac{n}{k^2}m + \frac{n'}{k'^2}m' + \frac{n''}{k''^2}m''}{\frac{n}{k^2} + \frac{n'}{k'^2} + \frac{n''}{k''^2}}$$

Cette expression ne diffère de la précédente qu'en ce que les nombres n, n', n'', sont remplacés respectivement par $\frac{n}{k^2}, \frac{n'}{k'^2}, \frac{n''}{k''^2}$.

La quantité $\frac{n}{k^2}$, qui représente l'importance de la première série, ou la quantité dont elle pèse dans la détermination de M, a reçu le nom de *poids* du résultat des observations ; elle exprime un certain nombre d'observations dont la précision est telle que pour elles on a $k = 1$.

Le poids du résultat moyen de chacune des trois séries considérées étant $\frac{n}{k^2}, \frac{n'}{k'^2}, \frac{n''}{k''^2}$, le poids du résultat M, ou de la moyenne générale des trois séries, est $\frac{n}{k^2} + \frac{n'}{k'^2} + \frac{n''}{k''^2}$.

La limite pour laquelle la probabilité d'écart est p, était $\alpha\sqrt{\frac{2}{n}}k$ ou $\alpha\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n}{k^2}}}$ pour la première série, $\alpha\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n'}{k'^2}}}$ pour la

seconde, et $\alpha \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n''}{k''^2}}}$ pour la troisième ; elle sera pour la valeur M, déduite de l'ensemble des trois séries d'observations

$$[8] \quad \ldots S = \alpha \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n}{k^2}+\frac{n'}{k'^2}+\frac{n''}{k''^2}}} = \alpha \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{k^2}+\frac{n'}{k'^2}+\frac{n''}{k''^2}}}.$$

7. *Point d'impact moyen.*

Le lieu d'une cible qu'on a les plus grandes chances d'atteindre peut être déterminé au moyen de l'ensemble des observations des points d'impact. On admet que la direction et le chargement de l'arme restant les mêmes, il existe un certain point de la surface de la cible, ou mieux une ligne horizontale pour lesquels la probabilité d'un écart donné est la même en dessus qu'en dessous ; on admet également que, relativement à ce même point, ou à la verticale qui passe par ce point, les écarts latéraux à droite et à gauche sont également probables.

L'intersection de cette horizontale et de cette verticale déterminées séparément est le point particulier qu'on désigne par le nom de *point d'impact moyen.*

Soient $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ les distances horizontales des n points d'impact sur une cible verticale, rapportés à la trace CV (*fig.* 1) du plan vertical de tir, les distances vers la droite du tireur étant regardées comme positives, les autres comme négatives ; soient $B_1, B_2 \ldots B_n$, les hauteurs des mêmes points au-dessus d'une horizontale choisie arbitrairement sur la cible. Soit α la valeur moyenne des premières distances et β la moyenne des secondes on aura $\alpha = \frac{A_1 + A_2 \ldots\ldots A_n}{n} = \frac{\Sigma A}{n}$ et $\beta = \frac{B_1 + B_2 \ldots\ldots B_n}{n} = \frac{\Sigma B}{n}$; α et β seront l'abcisse et l'ordonnée du point d'impact moyen dont on pourra ainsi fixer la position sur la cible.

Le calcul de α, qui n'est que la moyenne algébrique des écarts, revient à faire la somme des écarts à droite et celle des écarts à gauche, à les retrancher l'une de l'autre, à diviser la différence par le nombre total des points d'impact, et à porter ce quotient du côté où la somme des écarts est la plus grande.

Il en est de même de β. En général, pour éviter la distinction des signes *plus* ou *moins*, il est plus commode de prendre l'origine des abscisses assez à gauche, et celle des ordonnées assez abaissée, pour n'avoir à considérer que des écarts positifs.

Le point d'impact moyen jouit de plusieurs propriétés importantes. Que par ce point soient tracées deux axes parallèles aux premiers; soient $a_1 = A_1 - \alpha$, $a_2 = A_2 - \alpha \ldots a_n = A_n - \alpha$, les écarts horizontaux, positifs ou négatifs, relatifs à la verticale du point d'impact moyen ; $b_1 = B_1 - \beta$, $b_2 = B_2 - \beta \ldots b_n = B_n - \beta$, les écarts relatifs à l'horizontale qui passe par le même point, et $c_1, c_2 \ldots c_n$ les écarts absolus, ou les distances au point d'impact moyen, on aura : $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $c_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \ldots$ On aura, d'après ce qu'on a déjà vu, $\Sigma a = a_1 + a_2 \ldots + a_n = o$ et $\Sigma b = o$; la somme des écarts absolus sera $\Sigma c = \Sigma \sqrt{a^2 + b^2}$ et essentiellement positive. On reconnaîtra aussi que, comparativement à toute autre verticale, la somme des carrés des écarts ou Σa^2 est un minimum (art. 2); de même, comparée à toute autre horizontale, la somme des carrés des écarts verticaux ou Σb^2 est un minimum. Par conséquent aussi, $c_1 + c_2^2 \ldots$ ou $\Sigma c^2 = \Sigma a^2 + \Sigma b^2$ est un minimum; autrement dit : *la somme des carrés des écarts absolus du point d'impact moyen est un minimum.* C'est une propriété qui distingue ce point de tous les autres.

Si, par le point d'impact moyen, on mène une droite quelconque, et qu'on mesure les écarts des mêmes points, relativement à cette droite, on peut démontrer que la somme des écarts dans un sens est égale à celle des écarts dans l'autre, et que la somme des carrés de tous les écarts est un minimum.

En considérant la symétrie qui tend à s'établir entre les divers points d'impact à mesure que le nombre de ceux que l'on considère est plus grand, on peut voir que le rapport entre le nombre des écarts d'un côté, et celui des écarts de l'autre côté, tend constamment à se rapprocher de l'unité, mais ces nombres ne sont pas nécessairement égaux entre eux.

k étant le moyen écart vertical, h le moyen écart horizontal, l le moyen écart absolu, et n le nombre des points, on aura :

$$h = \left(\frac{\Sigma a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \; k = \left(\frac{\Sigma b^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } l = \left(\frac{\Sigma c^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\Sigma a^2 + \Sigma b^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = (h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}};$$

on voit que l est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont h et k sont les côtés.

Soient d et f l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque o' (*fig.* 1) rapportés au point d'impact moyen o comme origine et g sa distance à ce point ; les sommes des carrés des écarts horizontaux et verticaux rapportés à ce point seront (art. 2, équ. 4).

$$\Sigma(a-d)^2 = \Sigma a^2 + nd^2 = n(h^2 + d^2);\ \Sigma(b-d)^2 = \Sigma b^2 + nf^2 = n(k^2 + f^2)$$

et la somme des carrés des écarts absolus rapportée au point o' sera :

$$\Sigma a^2 + \Sigma b^2 + n(d^2 + f^2) = n(l^2 + g^2).$$

g^2 ou $d^2 + f^2$ étant nécessairement positifs, la somme des carrés des écarts pris par rapport à un point quelconque est plus grande que s'ils sont pris par rapport au point d'impact moyen, ce qu'on savait déjà ; la différence est égale au carré de la distance des deux points multipliés par le nombre des écarts.

Pour avoir Σa^2, Σb^2 et Σc^2, il n'est pas nécessaire d'avoir calculé chacune des valeurs de $a_1, b_1, c_1 \ldots a_2, b_2, c_2 \ldots$, il suffit de faire les carrés des écarts $A_1^2, A_2^2 \ldots$ et de $B_1^2, B_2^2 \ldots$ relativement à une ligne quelconque ; car on aura, d'après ce qui a été dit : $\Sigma a^2 = \Sigma A^2 - n\alpha^2$ et de même $\Sigma b^2 = \Sigma B^2 - n\beta^2$. g étant la distance des points c et o, on aura $\Sigma c^2 = \Sigma a^2 + \Sigma b^2 = \Sigma A^2 + \Sigma B^2 - n(\alpha^2 + \beta^2)$ ou $\Sigma c^2 = \Sigma A^2 + \Sigma B^2 - n\, g^2$. Cette relation est la réciproque de la précédente ; d et f sont égaux à α et β, mais de signes contraires.

8. *Analogie entre le point d'impact moyen et le centre de gravité ; entre la somme des carrés des écarts et le moment d'inertie.*

Si l'on imagine qu'en chacun des points touchés de la cible on ait placé un projectile ou une masse μ qui en soit une fraction donnée, la cible étant sans masse, les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble de ces projectiles seront, en conservant les notations précédentes :

$$X = \frac{\Sigma A.\mu}{n\mu} = \frac{\Sigma A}{n} \text{ ou } \alpha\,; \text{ et } Y = \frac{\Sigma B.\mu}{n\mu} = \frac{\Sigma B}{n} \text{ ou } \beta\,;$$

d'où l'on voit que le point d'impact moyen n'est autre chose

que le centre de gravité d'un système de points matériels également pesants, remplaçant chacun un projectile.

Ayant obtenu le point d'impact moyen de plusieurs groupes d'observations, le point d'impact moyen de l'ensemble des observations s'obtiendra en prenant le centre de gravité des masses qui représentent chaque groupe, considérées chacune comme proportionnelle au nombre des observations de chacun d'eux, ou aux poids de ces observations, lorsqu'elles n'ont pas le même degré de précision.

L'analogie que nous remarquons s'étend à la somme des carrés des écarts. En effet, le moment d'inertie de diverses masses μ, relativement à la verticale qui passe par le centre de gravité, sera $\Sigma a^2.\mu$; puisque l'on a $\frac{\Sigma a^2}{n} = h^2$, le moment d'inertie, relativement à l'axe des Y, sera $n\mu h^2$; le rapport de ce moment d'inertie à la masse $n\mu$ est donc h^2 et égal au carré du moyen écart. Il en sera de même quant à k^2.

Le moment d'inertie des masses, pris relativement à une ligne passant par le point d'impact moyen, perpendiculairement au plan de la cible, sera $\Sigma c^2.\mu$ et comme $\frac{\Sigma c^2}{n} = l^2$, on aura $\Sigma c^2.\mu = n\mu l^2$; par conséquent, l^2, qui est égal à $h^2 + k^2$, est égal au rapport du moment d'inertie à la masse.

On trouverait des rapports analogues entre les carrés des écarts comptés relativement à des parallèles aux axes que nous avons considérés, et par rapport à une droite quelconque passant par ces points.

Si l'on imagine une cible sans pesanteur, et que les points d'impact y soient marqués par de petites masses égales entre elles, et qu'on détermine le centre de gravité de la surface par un procédé quelconque, on aura obtenu le point d'impact moyen.

Si, maintenant, on fait osciller autour d'une ligne parallèle à l'axe des y, et à une distance connue de cet axe, la cible chargée de ces petites masses de dimensions négligeables devant celles de la cible, et qu'on observe la durée des oscillations, de petite amplitude, on en déduira la valeur de h. On déterminerait de même la valeur de k et celle de l.

Il serait impossible, dans l'application, d'avoir une cible sans

pesanteur ; on serait donc amené à tenir compte de sa masse dans chaque expérience, ce qui rendrait l'opération peu praticable; ces rapprochements n'en sont pas moins remarquables.

9. *Causes d'erreurs ou de déviations ajoutées aux causes préexistantes.*

Lorsqu'une cause d'augmentation des erreurs à chaque observation, ou des écarts d'un projectile à chaque coup, est introduite dans les observations relatives à ces mesures, elle augmente certains écarts et en diminue d'autres; mais la somme des carrés des écarts est toujours augmentée d'une quantité qu'il est facile d'apprécier.

Prenons pour exemple le cas d'un fusil qu'on tire d'abord avec des précautions suffisantes pour annuler toutes les erreurs de direction de l'arme, soit $a_1, a_2, \ldots$ les abscisses des n points d'impact, $b_1, b_2\ldots$ leurs ordonnées et $c_1, c_2\ldots$ leurs distances au point d'impact moyen o, que nous supposons être le point sur lequel est dirigée l'arme, au moyen d'une hausse exactement déterminée à l'avance. Faisons toujours :

$$h^2 = \frac{\Sigma a^2}{n}, \quad k^2 = \frac{\Sigma b^2}{n} \text{ et } l^2 = \frac{\Sigma c^2}{n} = h^2 + k^2.$$

Si l'on tire sans les mêmes précautions, soit $d_1, d_2\ldots$ les abscisses, $f_1, f_2\ldots$, les ordonnées et $g_1, g_2\ldots$, les distances des points $o_1, o_2\ldots$, sur lesquels était réellement dirigée l'arme, par défaut de précautions, dans un nombre m de coups; soit fait

$$\frac{\Sigma d^2}{m} = h_1^2, \ \frac{\Sigma f^2}{m} = k_1^2 \ \text{ et } \ \frac{\Sigma g^2}{m} = l_1^2.$$

Supposons maintenant que, pour la direction sur o_1, il y ait n coups tirés, nous pouvons admettre qu'ils seront répartis autour du point o_1, sensiblement comme ceux que nous avons considérés dans le premier cas le sont autour du point o; la somme des carrés des écarts horizontaux, rapportés à ce dernier point, sera alors $\Sigma a^2 + n d_1^2$, celle des écarts verticaux $\Sigma b^2 + n f_1^2$ et celle des écarts absolus $\Sigma c^2 + n g_1^2$.

Si, pour la seconde direction de l'arme sur le point o_2, on

suppose qu'il y ait également n coups tirés, le nombre n étant suffisamment grand, les sommes des carrés des écarts horizontaux, verticaux ou absolus, seront sensiblement les mêmes que dans le premier cas, et les sommes des carrés des écarts ou des distances respectives, rapportées, comme précédemment, au point o, seront :

$$\Sigma a^2 + n d_2^2\ ;\ \Sigma b^2 + n f_2^2\ ;\ \Sigma c^2 + n g_2^2.$$

On aura également, pour la somme des écarts relatifs à la troisième direction :

$$\Sigma a^2 + n d_3^2\ ;\ \Sigma b^2 + n f_3^2\ ;\ \Sigma c^2 + n g_3^2.$$

En opérant de même pour chacun des m points ou m directions différentes, et faisant la somme des carrés de tous les écarts pour tous les points d'impact, dont le nombre est égal à $m n$, on aura respectivement :

$$m\Sigma a^2 + n\Sigma d^2\ ;\ m\Sigma b^2 + n\Sigma f^2\ ;\ m\Sigma c^2 + n\Sigma g^2\ ;$$

et en divisant ces sommes par le nombre $m n$ des points d'impact, on aura le carré des moyens écarts horizontaux, verticaux ou absolus, représentés par H^2, K^2, L^2, c'est-à-dire respectivement :

$$H^2 = \frac{\Sigma a^2}{n} + \frac{\Sigma l^2}{m};\ K^2 = \frac{\Sigma b^2}{n} + \frac{\Sigma f^2}{m};\ L^2 = \frac{\Sigma c^2}{n} + \frac{\Sigma g^2}{n}$$

et par suite des notations adoptées :

$$H^2 = h^2 + h_1^2\ ;\ K^2 = k^2 + k_1^2;\ L^2 = l^2 + l_1^2$$

Ce résultat très-simple fait voir de combien une nouvelle cause d'erreurs ou d'écarts augmente le moyen écart ; on en déduira le *poids* des nouvelles observations, et la probabilité de la moyenne, d'après ce qui a été dit plus haut (art. 6). Ce qui précède s'appliquerait à l'addition d'une troisième ou d'une quatrième cause d'erreur ou d'écart.

Quand les valeurs h_1, k_1, l_1, pourront se déterminer directement, on aura les valeurs de H, K, L, et réciproquement, quand on aura pour deux séries d'expériences distinctes H, K, L, et h, k, l, on en déduira h_1, k_1, l_1, comme si l'expérience avait pu être faite isolément, et l'on pourra ensuite s'en servir pour l'introduire comme un résultat indépendant, dans d'autres séries d'observations.

Ainsi, dans le tir du canon, en faisant pointer successivement un nombre m de coups sans précautions particulières, on cherchera, par des moyens précis, les points du but sur lesquels était réellement dirigée la ligne de mire du canon à chaque coup, au lieu de l'être effectivement et constamment sur un point unique o; on déterminera pour chaque épreuve les quantités $d_1, f_1, d_2, f_2 \ldots$, par suite on aura h_1 et k_1. Connaissant, d'une autre part, par l'observation, les quantités h et k pour un canon exactement dirigé sur le point o, on en déduira les quantités H, K, L, sans avoir besoin de faire de nouveau l'expérience du tir.

10. *Considérations générales sur la probabilité d'atteindre une surface donnée, et courbes d'égale probabilité.*

Considérons le cas du tir le plus général, celui des bombes sous de grands angles de projection au-dessus d'un terrain horizontal. On indique sur le sol, comme axes, la trace du plan vertical de tir et une ligne perpendiculaire, et l'on marque le point d'impact de chaque coup ; la position de chacun de ces points sera déterminée par ses coordonnées et rapportée aux deux axes. Soit n le nombre des points d'impact, supposé très-considérable, ils seront plus rapprochés les uns des autres dans une partie centrale, et de plus en plus écartés dans les parties plus éloignées. Si l'on suppose tracées sur le sol des lignes parallèles à chacun des deux axes et à des intervalles très-petits égaux à i pris pour unité, la surface sera divisée en un grand nombre de petits carrés dont les côtés seront i et les aires i^2, et dont les centres auront x et y pour coordonnées. Chacun d'eux contiendra un certain nombre t de points d'impact variable d'un carré à l'autre.

En vertu du principe des probabilités, qui détermine la probabilité des événements futurs d'après les événements passés, la probabilité qu'à un nouveau coup le projectile tombera dans le petit carré i^2 sera $\frac{t}{n}$.

Si l'on joint par une ligne continue tous les points placés sur le plan pour lesquels la valeur de $\frac{t}{n}$ est égale à une quantité donnée p, cette ligne sera le lieu du centre des carrés i^2 qu'on a

la même probabilité d'atteindre; nous la nommerons *courbe d'égale probabilité*. En faisant le même tracé pour une suite de valeurs de p, dont les différences successives seront égales et suffisamment petites, on définira complétement la loi de probabilité d'atteindre la surface.

En supposant que les projectiles qui tombent sur chacun des carrés y soient remplacés par des parallélipipèdes rectangles de bases i^2 et d'une hauteur commune, que le nombre des projectiles augmente suffisamment, et que le côté des carrés diminue, on se rapprochera indéfiniment d'un solide limité par une surface continue dont l'ordonnée verticale t représentera complétement la loi de la probabilité d'atteindre.

Les courbes de même élévation représentent ici les courbes d'égale probabilité et la loi des écarts en tous sens, comme les courbes de niveau, en topographie, représentent la surface d'un terrain.

Ces considérations s'appliqueront également au tir d'une arme sur une cible verticale.

11. *Propriétés des courbes d'égale probabilité.*

Les courbes d'égale probabilité sont les limites des surfaces qui, à égalité de superficie sur une cible, laissent les plus grandes probabilités d'atteindre. En effet, si à une partie $abcdf$ de l'une de ces courbes nécessairement fermées (*fig.* 2) on substitue un arc $ahckf$ qui laisse une superficie égale, il faudra que le segment intérieur $abch$ soit équivalent au segment extérieur $cdfk$: mais aux divers points du premier correspondent des hauteurs plus grandes qu'à ceux du segment $cdfk$: par conséquent, le volume enlevé est plus grand que le volume ajouté : donc le volume limité par la nouvelle courbe est plus petit que le volume primitif: or, les volumes sont ici proportionnels au nombre des projectiles qui ont frappé, ou à la probabilité d'atteindre : donc les courbes d'égale probabilité forment la limite des parties d'une cible qui, à égalité de superficie, laissent les plus grandes probabilités d'atteindre.

12. *Courbes de la probabilité des écarts.*

Il serait trop difficile de réunir des observations en assez grand nombre et assez régulières pour opérer de la manière in-

diquée plus haut (art. 10). On arrivera facilement au même résultat par le procédé suivant.

Supposons tracées des bandes de largeur i parallèlement à l'axe des y (*fig.* 3), et appelons u le nombre des points d'impact observés sur une de ces bandes, dont le milieu est à la distance x; u sera une fonction de x, et on la représentera par une courbe continue u_0, u_1... Représentons de même par v le nombre des points d'impact qui tombent sur la bande de largeur i, et dont le milieu a y pour ordonnée : v sera une fraction de y seul ; on la représentera également par une courbe continue v_0, v_1....

D'après le principe de la probabilité des événements futurs, tirée des événements passés, la probabilité qu'à un nouveau coup le projectile tombe dans la bande parallèle à l'axe des y située à une distance x sera $\frac{u}{n}$. De même, la probabilité qu'il tombe sur la bande qui est à la distance y de l'axe de x sera $\frac{v}{n}$. Mais, en vertu du principe de la probabilité des événements composés, résultant du concours des événements simples, la probabilité de l'événement composé est égale au produit des probabilités des événements simples : donc la probabilité que le projectile tombe dans le carré dont le centre a pour coordonnées x et y sera le produit $\frac{u}{n} \cdot \frac{v}{n}$ des probabilités ; ce produit devra être égal à $\frac{t}{n}$.

Nous supposons ici que la probabilité d'un écart dans le sens vertical est indépendant de l'écart dans le sens latéral ; c'est ce que permet d'admettre l'inspection des points d'impact sur une surface ; l'on n'y aperçoit aucune dépendance.

Soit p_1 une probabilité donnée d'atteindre un carré déterminé ; partons d'une abscisse x à laquelle, d'après la courbe des u, correspond la valeur u_1 et la probabilité $\frac{u_1}{n}$; puisqu'on doit avoir $p_1 = \frac{u_1}{n}\frac{v_1}{n}$, on aura $v_1 = n^2 \frac{p_1}{u_1}$; on cherchera quelle est, sur la courbe des v, la valeur de y qui correspond à v_1; x et y seront les coordonnées du lieu où la probabilité d'atteindre un carré i^2 est égale à la quantité donnée p_1

On trouvera, de la même manière, autant de points de même probabilité, et, par conséquent, d'une courbe d'égale probabi-

lité. On opérera de même pour autant de courbes qu'on voudra.

Lorsque les valeurs de u et de v ne présentent pas un décroissement suffisamment régulier, par suite d'un nombre de coups insuffisant, on modifie les ordonnées u et v de manière à obtenir cette régularité sans altérer la somme des valeurs observées.

On donne ici comme exemple la surface représentative du tir des bombes de divers calibres sur un plan horizontal à la distance de 600m (*fig.* 4).

Les cotes des courbes indiquent le nombre des bombes qui, sur 10,000, tombent sur un carré de deux mètres de côté ; on y reconnaît que les courbes d'égale probabilité sont deux fois environ plus allongées, dans le sens des portées ou de la ligne de tir que dans le sens latéral ; cela provient en grande partie de l'inclinaison des trajectoires près du point de chute des projectiles sur le terrain (*).

Les nombres de projectiles qui frappent les bandes parallèles à l'axe des y étant ajoutés successivement à partir de l'axe et d'un même côté, on aura le nombre de ceux qui sont compris entre cet axe et la dernière bande considérée. De même en ce qui regarde l'axe des x. Soit U le nombre des projectiles dont l'éloignement de l'axe des y, du côté des X positifs, ne dépasse pas x, et V la somme de ceux dont l'éloignement de l'axe des x du côté des Y positifs ne dépasse pas y ; U sera une fonction de x, et V sera une fonction de y, qu'on peut toutes deux représenter par des courbes. En conséquence du principe de la probabilité des événements futurs, d'après celle des événements observés, la probabilité qu'à un nouveau coup le projectile tombe du côté des x positifs et ne s'éloigne pas de plus de x sera $\frac{U}{n}$; de même, la probabilité qu'il tombe du côté des y positifs et ne s'éloigne pas de plus de y sera $\frac{V}{n}$.

(*) J'ai exécuté cette représentation graphique, en 1823, d'après le relevé des points de chute de plus de 1,300 bombes, aux écoles à feu de Douai ; c'est de cette recherche qu'ont été tirés les résultats consignés dans le tableau du *Traité d'artillerie* de M. le général Piobert (partie élémentaire et pratique, pag. 204 et 215 de la 1re édition). Cette représentation a été établie en prenant l'ancienne toise pour unité. Le tir qu'on exécute maintenant présente notablement moins de déviations.

Soit U' le nombre des projectiles qui ont frappé du côté des X négatifs jusqu'à la distance x, et V' ceux qui ont frappé du côté des y négatifs, jusqu'à la distance y : la probabilité qu'à un nouveau coup le projectile ne s'éloignera pas de l'axe des y de plus de $\pm x$ sera $\frac{U+U'}{n}$, et celle qu'il ne s'éloignera pas de l'axe des y de plus de $\pm y$ sera $\frac{V+V'}{n}$. La probabilité que le projectile ne s'éloigne pas de $\pm x$ de l'axe des y, et qu'en même temps il ne s'éloigne pas de $\pm y$ de l'axe des x, sera le produit des deux probabilités, prises séparément, et par conséquent égale à $\frac{U+V'}{n} \cdot \frac{V+V'}{n}$.

On admet, comme nous l'avons dit, qu'il y a un point à partir duquel la probabilité des écarts est la même dans un sens et dans l'autre, du côté des X positifs ou du côté des X négatifs. Supposons que les coordonnées sont rapportées à ce point, alors $U'=U$, $V'=V$, et la probabilité qu'à un nouveau coup le projectile ne s'éloignera pas de plus de $\pm x$ sera $\frac{2U}{n}$, et celle qu'il ne s'éloignera pas de $\pm y$ sera $\frac{2V}{n}$, et, enfin, la probabilité qu'il sera compris dans un rectangle dont les demi-côtés sont égaux respectivement à x et y et dont le centre est o sera $S=4\,\frac{U}{n} \cdot \frac{V}{n}$.

Suivant le principe de la probabilité des événements futurs, d'après les événements passés, le nombre des coups qui atteindront le plus probablement le rectangle sur un nombre N de coups tirés sera NS. La différence de ce nombre au nombre réel de coups touchés sera une fraction de N d'autant moindre que N sera plus grand, le nombre n des coups observés devant être déjà grand par lui-même.

Ces considérations s'appliquent au tir sur une cible verticale, comme à la chute des bombes sur un plan horizontal.

Si la probabilité des écarts est égale dans tous les sens, les courbes d'égale probabilité seront des circonférences de cercle, et les surfaces de plus grande probabilité des cercles.

15. *Formules de la probabilité d'atteindre une surface limitée et une bande de petite largeur.*

En considérant sur le plan d'une cible des bandes parallèles d'une petite largeur prise pour unité, on reconnaît que le nombre des projectiles qui les atteignent va en décroissant à mesure qu'on s'éloigne du point d'impact moyen, faiblement d'abord, puis plus rapidement ensuite, et que le nombre des points touchés devient négligeable à partir de certaines limites, qui dépendent de l'arme et de la distance du but, de l'espèce du tir et de quelques autres circonstances. La loi que nous avons déjà vérifiée par ses conséquences (art. 5) revient à supposer que la probabilité des écarts est en raison directe d'une certaine puissance d'un nombre plus petit que l'unité, laquelle puissance est proportionnelle au carré de l'écart.

Cette hypothèse satisfait aux conditions dont nous avons parlé plus haut (art. 10), et nous pouvons l'appliquer en prenant pour le nombre plus petit que l'unité le quotient de l'unité par la base des logarithmes népériens.

Soit ε une grandeur déterminée qui dépendra, dans chaque cas, de l'étendue des écarts, et à laquelle nous rapporterons les distances x, de manière à n'avoir à considérer que le rapport $\frac{x}{\varepsilon}$; A une quantité connue, variable dans chaque cas; u le nombre de coups qui atteignent une bande d'une petite largeur i, parallèle à l'axe des ordonnées verticales, à la distance x de cette ligne, on aura :

$$u = \mathrm{A}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{i}{\varepsilon}, \quad \text{ou} \quad u = \mathrm{A}\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}\, \frac{i}{\varepsilon}$$

Si x est très-petit relativement à ε, $\frac{x^2}{\varepsilon^2}$ est extrêmement petit, et par conséquent $e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$ ne diffère presque pas de l'unité, et ne varie que d'une manière insensible tant que $\frac{x}{\varepsilon}$ est petit.

Quand la valeur de $\frac{x}{\varepsilon}$ est notablement plus grande que l'u-

nité, la valeur de u est extrêmement faible, et quand x augmente encore, u devient bientôt négligeable.

D'après cela, le nombre des projectiles, dont le centre atteindrait une bande de largeur infiniment petite $\frac{dx}{\varepsilon}$, sera $Ae^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}.\frac{dx}{\varepsilon}$, et celui des points d'impact compris entre l'axe des y et une parallèle à la distance s de cette ligne sera l'intégrale de cette expression prise de o à $\frac{s}{\varepsilon}$, c'est-à-dire qu'en appelant U ce nombre, on aura :

$$U = A\int_0^{\frac{s}{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}.\frac{dx}{\varepsilon}.$$

Le nombre total des points d'impact d'un même côté de l'axe des y en deçà et au delà de la parallèle sera l'intégrale de la même expression entre o et l'infini positif, c'est-à-dire

$$A\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}.\frac{dx}{\varepsilon}.$$

Les mêmes relations auront lieu du côté des x négatifs, puisque l'axe des y passe par le point d'impact moyen, de sorte que le rapport des deux intégrales définies ci-dessus indique le rapport du nombre des coups qui tombent dans les limites posées, soit à droite, soit à gauche de l'axe des y, au nombre total des coups, et, par conséquent, en vertu du principe des probabilités des événements composés, la probabilité p d'atteindre la cible entre ces limites par le tir d'un nouveau coup sera :

$$p = \frac{\int_0^{\frac{s}{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}.\frac{dx}{\varepsilon}}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}.\frac{dx}{\varepsilon}}$$

en faisant $\frac{s}{\varepsilon} = \alpha$ et $\frac{x}{\varepsilon} = t$ cette probabilité est :

$$p = \frac{\int_0^{\alpha} e^{-t^2} dt}{\int_0^{\infty} e^{-t^2} . dt}$$

Or, l'intégrale définie qui forme le dénominateur est, comme on sait, égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre : on aura donc :

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2} . dt.$$

Nous donnons, à la fin de ce travail, le tableau des valeurs du second membre représentées par $\varphi(\alpha)$; la valeur de p est ainsi une fonction de α ou de $\frac{s}{\varepsilon}$.

Les valeurs de ε, ainsi que celles de A, doivent être déterminées de manière à représenter les écarts observés. Or, le nombre total n des points d'impact devra être égal à l'intégrale de $A e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} . \frac{dx}{\varepsilon}$, entre les limites $+\infty$ et $-\infty$; et comme elle a la même valeur du côté des x positifs que du côté des x négatifs, et que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} . dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

on aura

$$n = A\sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad A = \frac{n}{\sqrt{\pi}}.$$

D'un autre côté, l'expression de U doit représenter la grandeur des écarts observés, ou au moins leur ensemble et leur moyenne. Nous avons déjà vu (art. 2) que la somme des carrés des écarts, pris relativement au point d'impact moyen, divisée par leur nombre, était un minimum, et ensuite que ce rapport déterminait la bonté des observations, et la dispersion plus ou moins grande des points d'impact. Nous devrons donc faire en sorte que l'expression adoptée de la loi des écarts donne, pour cette quantité, la valeur observée dans les épreuves. Or, le nombre des coups qui ont porté à la distance x sur une bande de largeur dx est :

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} . \frac{dx}{\varepsilon};$$

en le multipliant par le carré de la distance x^2, on aura la somme des carrés des écarts des points qui sont sur cette bande; le quotient de la somme des carrés des écarts par leur nombre sera, en faisant $\frac{x}{\varepsilon}=t$:

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-t^2} . dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . dt} = \frac{\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} . dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . dt}$$

on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . dt = \sqrt{\pi}$; on obtient aussi par les procédés connus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où il suit que le rapport cherché est égal à $\frac{\varepsilon^2}{2}$. D'un autre côté, ce rapport, déduit des observations ou des mesures prises des écarts $a_1, a_2\ldots$ en nombre n, et rapportés au point d'impact moyen, doit être $\frac{\Sigma a^2}{n}=h^2$: on aura donc :

$$\frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\Sigma a^2}{n} = h^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon^2 = 2h^2, \quad \varepsilon = h\sqrt{2}$$

par conséquent, les limites s de la cible entre lesquelles on aura une probabilité de toucher égale à p ou $\varphi(\alpha)$ seront données par la relation $\alpha = \frac{s}{\varepsilon} = \frac{s}{h\sqrt{2}}$, et seront $s=\alpha h\sqrt{2}$. Ainsi h étant connue et s étant donnée, on en tirera α et de là p : ou réciproquement, p étant donné, on en déduira, à l'aide du tableau de $\varphi(\alpha)$, la valeur de α et de là celle de s.

La valeur de ε étant déterminée, le nombre n de coups qui frappent une bande d'une très-petite largeur i, située à la distance x qui est représentée par $A\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} . \frac{i}{\varepsilon}$, sera, d'après l'ensemble des écarts d'un même tir :

$$u = \frac{n\, i}{h\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2h^2}};$$

et la probabilité de l'atteindre à un nouveau coup tiré sera $\frac{u}{n}$

ou :

$$p' = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2h^2}}.$$

En opérant de même pour les écarts relatifs à l'axe des y et désignés par b, et pour lesquels on a $\frac{\Sigma b^2}{n} = k$, la probabilité qu'à un coup tiré le centre du projectile tombe dans une bande de très-petite largeur i', à la distance y de l'axe des x, sera :

$$p' = \frac{i'}{k\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2k^2}}$$

et la probabilité que le coup frappe entre les deux limites $\pm s' = \alpha k \sqrt{2}$ sera :

[9] $$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2} . dt = \varphi(\alpha);$$

quand on donnera p, on en déduira α, puis $s = \alpha k \sqrt{2}$.

14. *Formules de la probabilité d'atteindre une surface limitée dans tous les sens.*

La probabilité de frapper un carré dont le côté très-petit est i et dont le centre a x et y pour coordonnées est donnée par la condition qu'il tombe à la fois dans la bande parallèle à l'axe des y de largeur i et à la distance x, et dans la bande parallèle à l'axe des x, de largeur i' et à la distance y. La probabilité du premier événement, c'est-à-dire la probabilité que la première condition soit remplie est ;

$$p' = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

La probabilité que le second événement arrive, ou que la seconde condition soit remplie, est :

$$p_1' = \frac{i'}{k\ 2\pi}\, e^{\frac{y^2}{2k^2}}$$

La probabilité que le centre du projectile se trouve dans le rectangle commun aux deux bandes, ou que les deux événements aient lieu à la fois, aura pour valeur le produit des probabilités

de chacun des deux événements, ou $p' p_1'$, que nous désignerons par P' et qui sera :

[10] $$P' = \frac{i i'}{2 h k \pi} e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)}.$$

S'il s'agit maintenant de déterminer la probabilité d'atteindre une surface de dimensions déterminées, on pourra la décomposer en petits rectangles, dont les côtés seraient égaux à i et i', et prenant, pour chacun, la valeur de P' d'après les distances x et y aux axes des coordonnées, la somme de ces valeurs donnera la probabilité de frapper la surface.

Si la courbe qui limite la surface à atteindre est déterminée par une expression en x et y, considérant des bandes de largeur dx perpendiculaires à l'axe des x et de largeur dy perpendiculaires à l'axe des y, la probabilité d'atteindre le rectangle dont les côtés sont dx et dy sera :

$$P' = \frac{dx\, dy}{2\pi h k} e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)};$$

et la probabilité de toucher la surface limitée sera l'intégrale double de cette quantité prise par rapport à x et y.

$$P = \frac{1}{2\pi h k} \int \int e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)} dx\, dy.$$

Les limites de cette intégrale seront déterminées par l'équation de la courbe qui limite la surface à atteindre.

15. *Probabilité d'atteindre un rectangle.*

Soit s le demi côté horizontal d'un rectangle dont le centre est au point d'impact moyen, s' le demi-côté vertical ; la probabilité de ne pas s'écarter de la verticale de $\pm s = \alpha h \sqrt{2}$ sera :

$$p = \varphi(\alpha)$$

la probabilité de ne pas s'écarter de l'horizontale de plus de $s' = \alpha' k \sqrt{2}$ sera :

$$p_1 = \varphi(\alpha')$$

La probabilité de frapper dans le rectangle dont les demi-côtes sont s et s' et dont la superficie est $4 s s'$ sera :

[11] $$P = p p_1 = \varphi(\alpha)\,\varphi(\alpha')$$

quantité facile à calculer dans tous les cas.

Si h^2 et k^2 sont égaux entre eux, ou s'ils sont assez peu différents pour qu'on puisse les remplacer l'un et l'autre par leur moyenne $\frac{h^2+k^2}{2}$ ou $\frac{l^2}{2}$; si de plus $s = s'$, auquel cas la surface est un carré, alors $\alpha = \alpha'$ et la probabilité de toucher le carré sera :

[12] $$P = p^2 = [\varphi(\alpha)]^2.$$

Si les demi-côtés s et s' d'un rectangle sont respectivement proportionnels à h et à k, les relations $s = \alpha h\sqrt{2}$ et $s' = \alpha' k\sqrt{2}$ donneront encore $\alpha = \alpha'$, $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha')$, et la probabilité de toucher le rectangle dont les côtés sont $2s$ et $2s'$, et la superficie $4ss'$, sera encore :

$$P = p^2 = [\varphi(\alpha)]^2$$

16. *Les courbes d'égale probabilité sont des ellipses dont les deux diamètres sont dans le rapport de* h *à* k.

La probabilité de toucher un rectangle dont les côtés, extrêmement petits, sont i et i' et les distances du centre aux axes égaux à x et y, est (éq. 10) :

$$P' = \frac{i\,i'}{2\pi h k} e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2}+\frac{y^2}{2k^2}\right)},$$

Or, il est facile de voir que, si l'on fait varier x et y de façon que l'exposant de e reste constant et qu'on ait $\frac{x^2}{2h^2}+\frac{y^2}{2k^2}=\frac{R^2}{l^2}$, la valeur de P' sera elle-même constante pour des valeurs communes de $i\,i'$. Or, la relation $\frac{x^2}{2h^2}+\frac{y^2}{2k^2}=\frac{R^2}{l^2}$ est l'équation d'une ellipse dont les diamètres sont respectivement proportionnels à h et à k. Donc, les courbes d'égale probabilité sont des ellipses dont les axes sont dirigées suivant ceux des x et des y, et dont les diamètres sont respectivement proportionnels à h et à k : par conséquent aussi, elles comprennent les espaces qui, sous une superficie déterminée, présentent la plus grande probabilité d'être atteints.

Si les causes de déviation, dans le sens horizontal et dans le sens vertical, sont égales, c'est-à-dire si $h^2 = k^2$, ou si ces quantités sont assez peu différentes pour qu'on puisse remplacer chacune d'elles par leur moyenne $\frac{h^2+k^2}{2} = \frac{l^2}{2}$, l'équation de la courbe d'égale probabilité $\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2} = \frac{R^2}{l^2}$ se réduira à $x^2 + y^2 = R^2$, c'est-à-dire que cette courbe est un cercle.

La probabilité P′ dépendra de la valeur de ii' et du rayon R; par la condition $h^2 = k^2 = \frac{l^2}{2}$, d'où $2hk = l^2$, elle deviendra

$$P' = \frac{ii'}{\pi l^2} e^{-\frac{R^2}{l^2}};$$

elle donnera

$$\frac{P' \pi l^2}{ii'} = e^{-\frac{R^2}{l^2}} \quad \text{et} \quad R = l\sqrt{\log \frac{ii'}{\pi l^2} - \log P'}.$$

On voit qu'à mesure que R augmente, ii' restant le même, la probabilité P′ diminue; R augmente aussi avec l, mais moins rapidement; R serait proportionnel à l, si ii' croissait comme l^2.

17. ***Probabilité d'atteindre un cercle.***

La probabilité d'atteindre un rectangle ii' placé à une distance ρ du point d'impact moyen, lorsque les causes d'écart sont égales dans le sens horizonta let dans le sens vertical, étant :

$$P' = \frac{ii'}{\pi l^2} e^{-\frac{\rho^2}{l^2}},$$

si, pour un élément de surface ii' infiniment petit, l'on prend i dans le sens du rayon, et i' dans le sens perpendiculaire, c'est-à-dire, dans le sens de l'arc, le premier sera $d\rho$. On remarquera que ρ et $d\rho$ restant les mêmes pour une même circonférence de cercle, la probabilité est proportionnelle à i', et comme elle s'étend à toute la circonféreuce qui est $2\pi\rho$, la probabilité d'atteindre l'élément circulaire de largeur $d\rho$ sera, en la désignant par p' :

$$p' = \frac{2\rho\, d\rho}{l^2} . e^{-\frac{\rho^2}{l^2}}$$

Cette expression doit être intégrée depuis $\rho = o$ jusqu'à $\rho = r$, si r est le rayon du cercle, et elle donnera la probabilité d'atteindre ce cercle :

$$P = \int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{l^2}} \cdot \frac{2\rho\,d\rho}{l^2} = -e^{-\frac{r^2}{l^2}} + \text{const.}$$

et comme pour $r = o$ on a $P = o$, on aura

[13] $$P = 1 - e^{-\frac{r^2}{l^2}}$$

ou, réciproquement, en faisant usage des logarithmes népériens :

[14] $$r = l\sqrt{\log \frac{1}{1-P}}.$$

Ces deux expressions sont très-simples et, comme lorsqu'on suppose $h = k$, on a $l^2 = 2h^2$, on aura aussi :

$$P = 1 - e^{-\frac{r^2}{2h^2}} \quad \text{et} \quad r = h\sqrt{2\log \frac{1}{1-P}}.$$

18. *Tables de probabilité d'atteindre des carrés, des cercles et des rectangles.*

Les applications au tir peuvent être rendues très-faciles en remplaçant les formules par des tables. Pour donner à celles-ci plus de généralité, on a pris pour la variable une fraction m de s, de h, de k ou de r.

Les quatre tables qui suivent donnent : la première, la probabilité que le projectile ne s'éloigne pas de la verticale passant par le point d'impact moyen, d'une quantité plus grande que $s = mh$, ou qu'il atteigne une bande verticale dont la demi-largeur s est mh. Il en résulte que $p = \varphi\left(m\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$. La table s'applique également aux écarts verticaux en faisant $s' = mk$.

La seconde, en supposant que $h = k$, donne la probabilité d'atteindre un carré dont le demi-côté est $s = mh$: la formule est alors $P = \left[\varphi\left(m\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right]^2$.

La troisième, en supposant $h = k$, donne la probabilité d'at-

teindre un cercle dont le rayon $r = mh$: la formule est alors $P = 1 - e^{-\frac{m^2}{2}}$. Quand l sera donné, on en déduira

$$h = l\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0,7071\ l.$$

La quatrième table donne la probabilité d'atteindre un rectangle dont le centre est au point d'impact moyen, et dont les demi-côtés s et s' sont mh et $m'k$. La formule qui donne la probabilité d'atteindre est $\varphi(m\sqrt{\tfrac{1}{2}}) \cdot \varphi(m'\sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

Dans les trois premières tables, on a fait varier m de 0,1 en 0,1 depuis 0 jusqu'à 3 ; au delà, et dans la table suivante, pour ne pas avoir trop d'étendue, on a pris les intervalles égaux à 0,2.

Table *de la probabilité d'atteindre une bande verticale ou horizontale, dont le milieu passe par le point d'impact moyen, et dont la ~~demi~~-largeur est* $s = m\,h$.

$m = \frac{s}{h}$	$p = \varphi(m\sqrt{\tfrac{1}{2}})$	$m = \frac{s}{h}$	$p = \varphi(m\sqrt{\tfrac{1}{2}})$	$m = \frac{s}{h}$	$p = \varphi(m\sqrt{\tfrac{1}{2}})$
0,0	0,00000	1,5	0,54674	3,0	0,86638
0,1	0,03989	1,6	0,57628	3,2	0,89040
0,2	0,07965	1,7	0,60466	3,4	0,91086
0,3	0,11923	1,8	0,63187	3,6	0,92813
0,4	0,15841	1,9	0,65787	3,8	0,94256
0,5	0,19741	2,0	0,68268	4,0	0,95449
0,6	0,23582	2,1	0,70627	4,4	0,97219
0,7	0,27356	2,2	0,72872	4,8	0,98360
0,8	0,31083	2,3	0,74984	5,2	0,99068
0,9	0,34833	2,4	0,76984	5,6	0,99489
1,0	0,38291	2,5	0,78866	6,0	0,99730
1,1	0,41768	2,6	0,80630		
1,2	0,45147	2,7	0,82297		
1,3	0,48430	2,8	0,83883		
1,4	0,51604	2,9	0,85292		
1,5	0,54674	3,0	0,86638		

Errata — dans ce tableau, et dans le suivant, s représente la largeur de la bande, et non la demi-largeur.

Table *de la probabilité* $P = [\varphi(m\sqrt{\tfrac{1}{2}})]^2$ *d'atteindre un carré dont le centre est au point d'impact moyen, et dont le* ~~*demi*~~*-côté* s *est* m h; *on suppose* h = k.

$m=\frac{s}{h}$	P	diff.	$m=\frac{s}{h}$	P	diff.	$m=\frac{r}{h}$	P	diff.
0,0	0.0000	16	1,5	0,299	33	3,0	0,751	42
0,1	0,0016	47	1,6	0,332	33	3,2	0,793	37
0,2	0,0063	79	1,7	0,365	34	3,4	0,830	31
0,3	0,0142	108	1,8	0,399	33	3,6	0,861	27
0,4	0,0250	140	1,9	0,432	33	3,8	0,888	23
0,5	0,0390	166	2,0	0,465	33	4,0	0.911	34
0,6	0,0556	182	2,1	0,498	32	4,4	0,945	22
0,7	0,0738	228	2,2	0,530	32	4,8	0,967	14
0,8	0,0966	247	2,3	0,562	30	5,2	0,981	9
0,9	0,1213	252	2,4	0,592	29	5,6	0,990	5
1,0	0,1465	279	2,5	0,621	29	6,0	0,995	
1,1	0,1744	293	2.6	0.650	27			
1,2	0,2037	309	2,7	0,677	26			
1,3	0,2346	318	2,8	0,703	24			
1,4	0,2664	325	2,9	0,727	24			
1,5	0,2989		3,0	0,751				

Table *de la probabilité* $P = 1 - e^{-\frac{r^2}{2h^2}}$ *d'atteindre un cercle dont le centre est au point d'impact moyen, et dont le rayon* r *est* m h; *on suppose* h = k.

$m=\frac{r}{h}$	P	diff.	$m=\frac{r}{h}$	P	diff.	$m=\frac{r}{h}$	P
0,0	0,0000	50	1,5	0,676	46	0,456	0,1
0,1	0,0050	146	1,6	0,722	42	0,667	0,2
0,2	0,0196	244	1,7	0,764	38	0,844	0,3
0,3	0,0440	329	1,8	0,802	34	1,010	0,4
0,4	0,0769	413	1,9	0,836	29	1,176	0,5
0,5	0,1182	465	2,0	0,865	25	1,354	0,6
0,6	0,1647	526	2,1	0,890	21	1,552	0,7
0,7	0,2173	568	2,2	0,911	18	1,795	0,8
0,8	0,2741	589	2,3	0,929	15	2,146	0,9
0,9	0,3330	606	2,4	0,944	12		
1,0	0,3936	606	2,5	0,956	10		
1,1	0,4542	593	2,6	0,966	8		
1,2	0,5135	575	2,7	0.974	6		
1,3	0,571	54	2,8	0,980	5		
1,4	0,625	51	2,9	0,985	4		
1,5	0.676		3,0	0,989			

Tableau *de la probabilité d'atteindre un rectangle dont la base* 2s *est m fois l'écart moyen horizontal* h, *et dont la hauteur* 2s' *est m' fois le moyen écart vertical* k.

m'	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	Infini.
	PROBABILITÉ POUR LA VALEUR DE *m*.																									
0,2	0,006																									
0,4	0,013	0,025																								
0,6	0,019	0,037	0,056																							
0,8	0,025	0,049	0,073	0,097																						
1,0	0,031	0,061	0,090	0,119	0,147																					
1,2	0,036	0,071	0,106	0,140	0,173	0,204																				
1,4	0,041	0,082	0,122	0,160	0,198	0,230	0,266																			
1,6	0,046	0,091	0,136	0,179	0,221	0,260	0,297	0,332																		
1,8	0,050	0,100	0,149	0,197	0,242	0,285	0,326	0,364	0,399																	
2,0	0,054	0,108	0,161	0,212	0,261	0,308	0,352	0,393	0,431	0,465																
2,2	0,058	0,115	0,172	0,226	0,279	0,329	0,376	0,420	0,460	0,497	0,530															
2,4	0,061	0,122	0,181	0,239	0,295	0,347	0,397	0,443	0,486	0,525	0,560	0,592														
2,6	0,063	0,127	0,190	0,251	0,309	0,364	0,416	0,464	0,509	0,550	0,587	0,620	0,650													
2,8	0,067	0,133	0,198	0,261	0,321	0,378	0,433	0,483	0,530	0,572	0,611	0,645	0,676	0,70[illegible]												
3,0	0,069	0,137	0,204	0,269	0,331	0,390	0,447	0,499	0,547	0,591	0,631	0,666	0,699	0,726	0,751											
3,2	0,071	0,141	0,210	0,277	0,341	0,402	0,459	0,513	0,562	0,607	0,648	0,685	0,718	0,746	0,771	0,793										
3,4	0,072	0,144	0,215	0,283	0,348	0,411	0,470	0,524	0,575	0,621	0,663	0,701	0,734	0,763	0,789	0,811	0,830									
3,6	0,074	0,147	0,219	0,285	0,355	0,419	0,479	0,535	0,586	0,633	0,676	0,714	0,748	0,778	0,804	0,826	0,845	0,861								
3,8	0,075	0,149	0,222	0,293	0,361	0,426	0,486	0,543	0,595	0,643	0,686	0,725	0,760	0,790	0,816	0,839	0,858	0,874	0,888							
4,0	0,076	0,151	0,225	0,297	0,365	0,431	0,493	0,550	0,603	0,650	0,694	0,734	0,769	0,800	0,826	0,848	0,868	0,885	0,899	0,911						
4,4	0,070	0,154	0,229	0,302	0,372	0,439	0,502	0,560	0,614	0,663	0,708	0,748	0,784	0,815	0,842	0,867	0,885	0,902	0,916	0,927	0,945					
4,8	0,078	0,156	0,232	0,306	0,376	0,444	0,507	0,566	0,621	0,671	0,716	0,757	0,793	0,824	0,852	0,875	0,895	0,913	0,926	0,938	0,956	0,967				
5,2	0,079	0,157	0,234	0,308	0,379	0,447	0,511	0,570	0,626	9,676	0,721	0,762	0,798	0,830	0,858	0,881	0,902	0,919	0,933	0,944	0,963	0,973	0,981			
5,6	0,079	0,157	0,235	0,309	0,381	0,449	0,513	0,573	0,628	0,679	0,724	0,765	0,802	0,834	0,862	0,885	0,906	0,923	0,937	0,949	0,968	0,979	0,986	0,990		
6,0	0,079	0,158	0,235	0,310	0,382	0,450	0,514	0,574	0,630	0,680	0,726	0,767	0,804	0,836	0,864	0,888	0,908	0,925	0,939	0,951	0,970	0,981	0,988	0,991	0,995	
Infini.	0,080	0,158	0,236	0,311	0,383	0,451	0,516	0,576	0,632	0,683	0,729	0,770	0,806	0,839	0,866	0,890	0,911	0,928	0,943	0,954	0,972	0,984	0,991	0,99[illegible]	0,997	1,000
m	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	Infini.

A l'aide des tables qui précèdent, on résout facilement les questions de probabilité d'atteindre des buts de diverses formes. En voici plusieurs exemples :

1° Sachant qu'aux distances 200^m, 400^m, 600^m, le tir de 100 coups du boulet de 16 à la charge de 1^k333 de poudre, a donné respectivement $h = 0^m348$, $h = 0^m901$, $h = 1^m618$, et $k = 0^m401$, $k = 1^m061$, $k = 1^m672$, on obtient pour les cercles qui sont atteints par la moitié des coups $r = 0^m44$, $r = 1^m16$, $r = 1^m94$; pour plus de simplicité, on a remplacé h^2 et k^2 par leur moyenne ;

2° Dans le même tir, la probabilité d'atteindre la bouche ou seulement d'effleurer le plus grand renflement du bourrelet d'un canon de 24, dont le rayon, augmenté de celui du boulet de 16, est 0^m24, est respectivement aux trois distances : 0,18 ; 0,03 et 0,01.

Il importe toujours de distinguer le cas général où l'on ne considère que les points d'impact déterminés par le centre des projectiles, d'un cas particulier, comme celui de l'exemple précédent, où l'on comprend également les points de la cible touchés par la surface du projectile ; le dernier est ramené au cas général, en supposant que le contour de la surface à atteindre est plus étendu, que le but en tout sens, d'une quantité égale à un rayon du projectile ;

3° La probabilité d'atteindre un rectangle de 0^m80 de hauteur, et de 4^m de base, figurant une embrasure, serait respectivement aux mêmes distances : 0,71; 0,30; 0,15.

4° Si, dans la probabilité d'atteindre un rectangle (ex. 3°), on tient compte des différences des écarts dans les deux sens, on trouve respectivement 0,682 ; 0,29 et 0,15, ce qui ne diffère presque pas des nombres précédents ;

5° Si, au lieu de diriger les coups au centre du rectangle de 0^m80 de hauteur, on les dirigeait 0^m30 au-dessous de ce centre, la probabilité d'atteindre serait égale à la somme des deux probabilités d'atteindre des rectangles dont les demi-hauteurs seraient respectivement 0^m70 et 0^m10 ; on obtiendrait respectivement à 200^m et 400^m, 0,55 et 0,275. La différence est notable à la première distance, et très-faible à la seconde ; elle l'est encore moins à la troisième.

La recherche de ces diverses probabilités nécessiterait beaucoup de temps et de dépenses, si l'on devait y parvenir par des épreuves spéciales;

6° Sachant par expérience qu'avec le fusil d'infanterie, à la distance de 200^m, le rayon du cercle qui contient la moitié des balles tirées est de 1^{m}48, on en déduira $h = 1^m26$, et ensuite que les cercles qui renferment $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}\dots$ des balles sont respectivement 0^{m}57; 0^{m}84, 1^{m}06; 1^{m}27; 1^{m}48; 1^{m}71; 1^{m}96; 2^{m}26; 2^{m}70; on en déduira également qu'une cible de 2^m de hauteur et 0^{m}50 de largeur sera atteinte par les 0,09 des coups.

19. *Comparaison de la probabilité d'atteindre un cercle ou un carré de superficies égales.*

Supposons que dans un tir $h = k$ d'où $l = h\sqrt{2}$, r étant le rayon d'un cercle, s le demi-côté d'un carré équivalent, on aura : $s = r\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. La probabilité d'atteindre le cercle est :

$$P = 1 - e^{-\frac{r^2}{l^2}}$$

La probabilité d'atteindre le carré équivalent

$$P = \left[\varphi\left(\frac{s}{h\sqrt{2}}\right)\right]^2 = \left[\varphi\left(\frac{r}{l}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right]^2$$

En calculant les valeurs de P par les deux formules, les secondes sont toujours plus petites, mais les différences sont négligeables lorsque $\frac{r}{l}$ est petit, comme on pouvait le prévoir, et comme on le voit dans le tableau ci-après :

Probabilité d'atteindre un cercle et un carré d'égale superficie.

$\frac{r}{l}$	CERCLE.	CARRÉ.	DIFFÉRENCE.
0,1	0,00996	0,00995	0,00001
0,2	0,03920	0,03917	0,00003
0,3	0,08606	0,08589	0,00017
0,4	0,14785	0,14734	0,00051
0,5	0,22120	0,22006	0,00114

Lorsque $r = l$ on a respectivement $P = 0,632$ et $P = 608$; la différence n'est que de 0,024. Ce rapprochement confirme l'exactitude des deux formules.

20. *Loi des écarts; probabilité de toucher une bande de très-petite largeur.— Représentation graphique, sommet, point d'inflexion.*

Désignons par i la largeur très-petite d'une bande parallèle à l'axe des y; la probabilité de l'atteindre à un coup donné est :

$$p' = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}}.$$

En représentant cette loi par une courbe, et prenant les écarts x pour abscisses, et les probabilités p' pour ordonnées, on voit d'abord que quand x est une petite fraction de h, $e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$ est sensiblement égal à l'unité et que $p' = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}}$ est alors un maximum correspondant au sommet de la courbe. A mesure que x augmente, p' diminue, mais très-peu d'abord; la courbe tourne sa concavité vers l'origine.

L'inclinaison θ de la tangente est donnée par la différentielle de p' prise relativement à x et l'on a :

$$\theta = -\frac{ix}{h^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

Cette tangente est nulle pour $x = o$; elle est ensuite négative pour x positif. Sa valeur, indépendamment du signe, augmente d'abord, et devient ensuite sensiblement négligeable quand x est très-grand ; il y a donc un point d'inflexion qui est donné par la condition que θ est un maximum, ou que sa différentielle, qui est $\frac{d\theta}{dx} = \frac{}{h^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \left(\frac{x^2}{h^2} - 1\right)$, soit égale à zéro, c'est-à-dire qu'on ait $\frac{x^2}{h^2} - 1 = 0$ ou $x = \pm h$. La valeur

de θ devient alors $\theta = \mp \frac{i}{h^2\sqrt{2\pi e}}$; ainsi le point d'inflexion se trouve à une distance égale au moyen écart.

Pour fixer les idées et faciliter les applications numériques, on suppose $i = \frac{h}{100}$ et $x = mh$ on aura $p' = \frac{0,01}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2}}$. Le tableau ci-après contient les résultats numériques pour des valeurs de m croissant par 0,1 jusqu'à $m = 3$.

PROBABILITÉ *d'atteindre une bande de largeur égale à* $\frac{h}{100}$ *située à* m h *du point d'impact moyen.*

m	$\frac{0,01}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2}}$	DIFFÉRENCES.	m	$\frac{0,01}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2}}$	DIFFÉRENCES.
0,0	0,00399	2	1,3	0,00171	21
0,1	0,00397	6	1,4	0,00150	20
0,2	0,00391	9	1,5	0,00130	19
0,3	0,00382	14	1,6	0,00111	17
0,4	0,00368	16	1,7	0,00094	15
0,5	0,00352	18	1,8	0,00079	13
0,6	0,00334	21	1,9	0,00066	12
0,7	0,00313	23	2,0	0,00054	10
0,8	0,00290	24	2,1	0,00044	9
0,9	0,00266	24	2,2	0,00035	7
1,0	0,00242	24	2,3	0,00028	6
1,1	0,00218	24	2,4	0,00022	4
1,2	0,00194	23	2,5	0,00018	»
1,3	0,00171		3,0	0,00004	

Si la bande que l'on doit considérer avait une largeur différente de $0,01\,h$, mais toujours petite, la probabilité qu'elle comprendra un écart donné sera proportionnelle à cette largeur.

Cette recherche est applicable au cas de la probabilité de toucher une ligne mathématique avec un projectile d'un petit diamètre; en effet, la ligne pouvant être touchée par un point quelconque du projectile, elle le sera par le projectile dont le centre ne s'écartera, de part ou d'autre, que d'un rayon ; ce qui est le cas de la bande d'une largeur égale au diamètre du projectile.

21. ***Probabilité de toucher une surface annulaire de très-petite largeur.***

La probabilité d'atteindre un cercle de rayon r étant (art. 17) $P=1-e^{-\frac{r^2}{l^2}}$, celle de frapper sur une zone circulaire de rayon r et de largeur dr sera la différentielle de cette expression par rapport à r :

$$\frac{dP}{dr}dr=e^{-\frac{r^2}{l^2}}\frac{2r}{l^2}dr.$$

La probabilité d'atteindre une zone d'une très-petite largeur i sera donnée par la formule de Taylor. Mais, en supposant i très-petit, rapportant la distance r au milieu de la largeur de la bande, le terme en i^2 disparaît; négligeant les quantités multipliées par les puissances de i supérieures à la seconde, on aura :

$$P'=\frac{2ri}{l^2}e^{-\frac{r^2}{l^2}}; \qquad [15]$$

pour $r=o$ on a $P'=o$; ensuite, tant que r est très-petit, P croît à peu près proportionnellement à r; mais, quand r est plus grand, P augmente rapidement et atteint sa valeur maximum ; il décroît ensuite très-rapidement. La courbe qui représentera P', en prenant les r pour abscisses, passera par l'origine (*fig.* 5).

L'inclinaison θ de la courbe sera donnée par la différentielle de P', $\theta=\frac{dP'}{dr}$ et elle aura pour expression :

$$\theta=\frac{2i}{l^2}e^{-\frac{r^2}{l^2}}\left(1-\frac{2r^2}{l^2}\right)$$

qui, pour $r=o$, donne $\theta=\frac{2i}{l^2}$. Elle devient nulle pour $1-\frac{2r^2}{l^2}=o$, ou, pour $r=\frac{l}{\sqrt{2}}$ qui est la distance du sommet de la courbe à l'axe des ordonnées. Pour des valeurs de r plus grandes, θ est négatif.

Au delà du sommet, il y a un point d'inflexion, qu'on obtient en cherchant le maximum de θ, ou en égalant à zéro sa différentielle prise par rapport à r, ce qui donne :

$$-\frac{4hri}{l^4}e^{-\frac{r^2}{l^2}}\left(3-2\frac{r^2}{l^2}\right)=0$$

Cette expression est satisfaite pour $r=o$, ou à l'origine ; ou bien par la condition $\frac{2r^2}{l^2}-3=0$, ou $\frac{r}{l}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Cette seconde valeur de r est la distance du point d'inflexion de la courbe.

Dans les valeurs ci-dessus, on suppose que le moyen écart horizontal h est égal au moyen écart k; alors, en remplaçant l^2 par $2h^2$, on a les expressions équivalentes :

$$P'=\frac{ri}{h^2}.e^{-\frac{r^2}{2h^2}} \quad . \quad 0=\frac{i}{h^2}e^{-\frac{r^2}{2h^2}}\left(1-\frac{r^2}{h^2}\right)$$

La distance du sommet de la courbe à l'axe est $r=h$; celle du point d'inflexion est $r=h\sqrt{3}=h.1{,}732$.

En prenant les valeurs de i et de r en parties de l, on aura des valeurs numériques qui s'appliqueront facilement à tous les cas. Soit pris, $i=\frac{l}{100}$, $r=nl$ et successivement $n=0{,}1$, $n=0{,}2\ldots\ldots$, on aura :

$$P'=\frac{2n}{100}e^{-n^2}.$$

et si l'on fait $r=mh$, $i=\frac{h}{100}$, on aura l'expression équivalente

$$P'=\frac{m}{100}e^{-\frac{m^2}{2}}.$$

Dans le tableau qui suit, on a calculé les valeurs de P′ pour les valeurs successives de $n=0{,}1$, $n=0{,}2\ldots$ et puis $m=0{,}1$, $m=0{,}2\ldots$ en prenant pour unité, d'abord l, et ensuite h.

Probabilité P′ *d'atteindre un anneau circulaire de largeur* 0,01 l, *ou* 0,01 h, *et dont le rayon moyen est respectivement* ml *ou* mh, *en supposant* h = k.

$n=\frac{r}{l}$	P′	$n=\frac{r}{l}$	P′	$m=\frac{r}{h}$	P′	$m=\frac{r}{h}$	P′
0,0	0,00000	1,5	0,00346	0,0	0,00000	1,5	0,00487
0,1	0,00198	1,6	0,00247	0,1	0,00100	1,6	0,00445
0,2	0,00384	1,7	0,00189	0,2	0,00196	1,7	0,00401
0,3	0,00548	1,8	0,00142	0,3	0,00287	1,8	0,00356
0,4	0,00682	1,9	0,00103	0,4	0,00369	1,9	0,00312
0,5	0,00779	2,0	0,00073	0,5	0,00441	2,0	0,00271
0,6	0,00837	2,1	0,00046	0,6	0,00501	2,1	0,00232
0,7	0,00857	2,2	0,00031	0,7	0,00548	2,2	0,00196
0,8	0,00844	2,3	0,00021	0,8	0,00581	2,3	0,00163
0,9	0,00801	2,4	0,00013	0,9	0,00600	2,4	0,00135
1,0	0,00736	2,5	0,00010	1,0	0,00607	2,5	0,00110
1,1	0,00656			1,1	0,00601		
		3,0	0,00001			3,0	0,00033
1,2	0,00569			1,2	0,00584		
1,3	0,00479			1,3	0,00559		
1,4	0,00395			1,4	0,00526		
1,5	0,00316			1,5	0,00487		

En comparant la courbe et la table de la probabilité des écarts de l'axe vertical à celles des écarts du centre (*fig.* 5), on voit que les probabilités suivent des marches totalement différentes, et, qu'en les confondant, un auteur, comme on le verra plus loin, est tombé dans une grave erreur.

La probabilité de toucher une circonférence donnée avec un projectile de petit diamètre se déduit des mêmes formules, en prenant le diamètre du projectile pour la largeur de la bande.

22. *Expression de la justesse du tir.—Unité de justesse.*

La divergence, ou les écarts des points d'impact entre eux, sont en raison directe du moyen écart de ces points. Elles sont en raison inverse de la justesse du tir, et elles peuvent la caractériser. Dans un mémoire sur la justesse du tir des balles, en 1838, j'avais pris pour terme de comparaison les côtés des carrés atteints par le tiers des coups tirés ; plus tard, à l'école normale de tir de Vincennes, on a pris le rayon du cercle qui contenait la meilleure moitié des coups.

La justesse de tir peut être exprimée par la proportion des coups qui atteignent une surface de dimensions déterminées, pourvu que ces dimensions soient convenablement choisies.

Si cette surface est très-étendue, relativement à h et à k, le rapport du nombre des coups qui atteignent à celui des coups tirés sera, pour tous les tirs, presque égal à l'unité, et, ne pourra servir à distinguer les divers degrés de justesse de ces tirs.

Si, au contraire, la surface a des dimensions de plus en plus petites, par rapport à h et à k, la proportion des projectiles qui atteindront sera de plus en plus faible, mais le rapport de ces proportions dans deux tirs différents sur le même but, se rapprochera de plus en plus d'une valeur constante; celle-ci pourra donc servir d'expression à la justesse.

De même aussi, en divisant la proportion des projectiles qui atteignent un but, ou la probabilité de l'atteindre à un coup donné, par l'étendue de ce but, on a des quotients, qui, à mesure que l'on considère des buts moins étendus, se rapprochent de plus en plus d'une valeur constante, indépendante de l'étendue du but; en voici un exemple :

En supposant $h=k$, et en considérant des carrés dont les côtés $2s$ sont des nombres de fois h, ou des fractions de h, de plus en plus petits, on aura les résultats renfermés dans le tableau suivant :

Côtés des carrés $2s$. .	$6h$	$3h$	$2h$	h	$0,5h$	$0,2h$	$0,1h$
Probabilité P'.	0,993	0,750	0,465	0,1465	0,03897	0,006344	0,0015912
Rapport $\frac{P'}{4s^2}$	$\frac{0,0276}{h^2}$	$\frac{0,0834}{h^2}$	$\frac{0,1162}{h^2}$	$\frac{0,1465}{h^2}$	$\frac{0,1559}{h^2}$	$\frac{0,1586}{h^2}$	$\frac{0,15912}{h^2}$

On voit, par les indications de ce tableau, que le rapport de $\frac{P'}{4s^2}$ va toujours en croissant quand l'étendue du but diminue et qu'il se rapproche de plus en plus d'une quantité constante; cette quantité limite est facile à obtenir. En effet, la probabilité P' d'atteindre un rectangle dont les côtés sont très-petits et dont

les coordonnées du centre sont x, y, est, pour des valeurs quelconques de h et de k:

$$P' = \frac{i i'}{2\pi h k} e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)}$$

Lorsque x et y diminuent de plus en plus, l'exposant de e est de plus en plus près de zéro ; à la limite l'on aura :

$$\frac{P'}{i i'} = \frac{1}{2\pi h k} = \frac{0,159155}{h k};$$

et, quand $h = k$, $\frac{P'}{i i'} = \frac{1}{2\pi h^2} = 0,159155 \frac{1}{h^2}$.

La justesse du tir peut donc, en général, être représentée par le quotient, que l'on obtient en divisant la probabilité d'atteindre une surface par l'étendue de cette surface, pourvu que celle-ci soit de petites dimensions, et elle aura pour expression $\frac{1}{2\pi h k}$.

On remarquera que $\pi h k$ est l'aire d'une ellipse dont les demi-diamètres sont h et k. Ainsi, la justesse du tir est égale à l'unité divisée par le double de l'ellipse dont les demi-diamètres sont les moyens écarts dans les deux directions perpendiculaires.

Cette ellipse se réduit à un cercle quand $h = k$ et la justesse est égale à $\frac{1}{2\pi h^2}$ ou $\frac{1}{\pi l^2}$ c'est-à-dire qu'elle est égale à l'unité divisée par l'aire du cercle dont le rayon est égal au moyen écart absolu.

En considérant la valeur de P' comme l'ordonnée d'une surface au point de la cible dont les coordonnées sont x et y, la surface est caractérisée par l'ordonnée du sommet qui, donnée par $x = o$ et $y = o$, est $\frac{i i'}{2\pi h k}$; en divisant cette ordonnée par l'aire $i i'$ on a $\frac{1}{2\pi h k}$, ou la justesse du tir.

Ces considérations donnent un corps à l'idée du *poids* d'une observation représentée par $\frac{1}{h^2}$ qui entre dans la moyenne des mesures résultant d'une série d'observations. Le rapport du poids à la justesse est égale à 2π.

Les données qui serviront à déterminer la justesse du tir avec la plus grande précision, sont les moyens écarts ou les écarts

moyens sur un grand nombre de coups ; à défaut l'on prendra la proportion des projectiles qui atteignent un cercle, un carré, un rectangle de dimensions telles que cette proportion soit comprise entre le tiers et la moitié du nombre total des projectiles tirés, et l'on en déduira le moyen écart ; ainsi sachant, par exemple, qu'à la distance de 100^m la moitié des balles de fusil atteignent un cercle de 0^{m}38 de rayon, et trouvant dans la table des probabilités d'atteindre un cercle (art. 18, 3e tableau, 5e et 6e colonne) qu'à $P = 0,5$ répond $r = 1,176\,h$; on aura $0^m38 = 1,176\,h$, d'où $h = 0^m323$; la justesse de tir est alors $\frac{0,150\,155}{(0,323)^2} = 1,52$.

Lorsque l'on aura la proportion pour deux rectangles dans des directions perpendiculaires, on en pourra déduire séparément h et k.

Voici divers exemples de justesse de tir, et les données d'où elles ont été déduites.

Justesse de tir du fusil d'infanterie, avec des balles sphériques, et de la carabine rayée en hélice, avec des balles allongées.

	Distances.	100^m	200^m	300^m	400^m	500^m	800^m
		m.	m.	m.	m.	m.	m.
RAYONS des cercles qui renferment la moitié des balles.	Fusil d'infanterie.	0,38	1,48	4,30	9,40	»	»
	Carabine..	0,10	0,15	0,26	0,40	0,94	2,00
JUSTESSE de tir $\frac{0,159\,155}{h^2}$	Fusil d'infanterie.	1,52	0,101	0,0112	0,0025	»	»
	Carabine..	22,0	9,88	3,29	1,385	0,251	0,0554
Rapport des justesses. .		14	98	274	554	»	»

Justesse de tir du pistolet d'officier de cavalerie à canon rayé en hélice.

	Distances.	50^m	100^m
		m.	m.
MOYENS écarts. . .	Horizontal h.	0,1885	0,709
	Vertical k. .	0,2083	0,812
JUSTESSE	$\frac{0,159\,155}{h.k}$	4,05	0,276

Justesse de tir du canon de 16 *à la charge de* 1^{k}333.

	Distances.	200^m	400^m	600^m
		m.	m.	m.
MOYENS écarts. . .	Horizontal h.	0,348	0,901	1,618
	Vertical k. .	0,407	1,061	1,672
JUSTESSE de tir	$\frac{0,159\,155}{h.k}$	1,124	0,166	0,0588

Justesse de tir des bombes de divers calibres sur un terrain horizontal à 600^m, déduit du tir des écoles à feu de Douai en 1823.

MOYENS écarts. . .	Latéralement. . . .	19^m
	Longitudinalement.	37
JUSTESSE de tir.		0,000253

Dans le tir des bombes, le moyen écart étant égal à plus de dix fois le côté du carré pris pour unité, la justesse du tir n'est autre que la probabilité d'atteindre un carré d'un mètre de côté. Avec le canon, à partir de 400^m et au delà, et avec le fusil, à partir de 200^m, la justesse de tir est égale à 100 fois la probabilité d'atteindre un but d'un décimètre carré. Ce serait, en appliquant une expression en usage, le *pour cent* sur une cible d'un décimètre carré. Avec les autres armes, la justesse est égale à 1000 fois la probabilité d'atteindre un millième de mètre carré. ou à 10,000 fois la probabilité d'atteindre un but d'un centimètre carré. Il est entendu que la probabilité ne se rapporte ici qu'à *la position du centre* du projectile sur la cible.

23. *Vérification, par l'expérience des formules de probabilité d'atteindre une surface donnée.*

On peut vérifier la loi des écarts des projectiles par les conséquences que l'on tire des formules, en comparant leurs résultats à ceux de l'observation. Nous prendrons d'abord pour exemple les résultats du tir des 100 coups de canon de 16 à la charge du sixième du poids du boulet qui ont déjà servi à vérifier la probabilité des erreurs sur les moyennes des mesures.

Tous les points d'impact observés à 200^m, 400^m, 600^m, ayant été rapportés au point d'impact moyen, on a eu les abscisses et les ordonnées de chaque point; on les a classées par ordre de grandeur, et on les a ensuite représentées sur une feuille de papier, afin de mesurer leur écart absolu du point d'impact moyen; ces distances ayant été également classées par ordre de grandeur, on a eu 9 séries d'écarts. Dans chacune d'elles on a reconnu la longueur qui comprenait 10, puis 20, puis 30,... points d'impact et qui correspondait ainsi à 0,1; 0,2; 0,3... du nombre total des coups ou à la probabilité 0,1; 0,2; 0,3... de frapper à un nouveau coup.

Lorsque les distances du 10e et du 11e point, ou du 20e et du

21° étaient différentes, on prenait pour limite le nombre intermédiaire qui paraissait le plus régulier, et qui a pu être souvent la limite calculée, ces limites étaient ainsi déterminées pour chaque cas à 2 ou 3 centimètres près.

On a ensuite calculé, à l'aide des formules, le moyen écart, les limites correspondantes aux probabilités 0,1; 0,2; 0,3... et on a ainsi obtenu les résultats renfermés dans le tableau ci-après :

Tableau *comparatif des limites observées des écarts, de* 100 *coups de canon de siége de* 16, *tirés à la charge de* 1k333, *aux distances de* 200m, 400m, 600m, *et des limites calculées par les moyens écarts.*

DISTANCES.	DIRECTION des ÉCARTS.	LIMITES OBSERVÉES DES ÉCARTS, CORRESPONDANT AUX PROBABILITÉS										MOYEN ÉCART.
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	
m.		m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m	m.	m.
200	Vertical...	0,04	0,10	0,18	0,25	0,28	0,33	0,41	0,50	0,58	1,11	0,3913
	Horizontal.	0,04	0,06	0,11	0,16	0,21	0,29	0,36	0,46	0,56	0,91	0,3480
	Absolu...	0,18	0,26	0,32	0,40	0,44	0,52	0,56	0,61	0,73	1,12	0,5235
400	Vertical...	0,06	0,20	0,41	0,54	0,70	0,86	1,06	1,24	1,68	2,80	1,061
	Horizontal.	0,11	0,23	0,34	0,52	0,65	0,78	0,94	1,18	1,48	2,40	0,904
	Absolu..	0,48	0,68	0,89	1,05	1,15	1,23	1,11	1,70	2,02	3,00	1,393
600	Vertical...	0,11	0,42	0.57	0,84	1,08	1,42	1,73	2,10	2,90	4,29	1,642
	Horizontal.	0,12	0,32	0,62	0,91	1,14	1,41	1,69	2,14	2,74	4,32	1,618
	Absolu...	0,68	1,11	1,47	1.72	1,98	2,22	2,48	3,05	3,38	4,84	2,315

DISTANCES.	DIRECTION des ÉCARTS.	LIMITES CALCULÉES DES ÉCARTS, CORRESPONDANT AUX PROBABILITÉS. :										
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999
		m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
200	Vertical...	0,05	0,10	0,15	0,21	0,26	0,33	0,41	0,50	0,65	1,04	1,49
	Horizontal.	0,04	0,08	0,13	0,18	0,23	0,29	0,36	0,45	0,57	0,91	1,33
	Absolu...	0,17	0,25	0,31	0,37	0,44	0,50	0,57	0,66	0,79	1,12	1,40
400	Vertical...	0,13	0,27	0,41	0,56	0,71	0,89	1,10	1,36	1,74	2,83	4,03
	Horizontal.	0,11	0,23	0,35	0,47	0,61	0,76	0,94	1,16	1,48	2,40	3.43
	Absolu...	0,45	0,66	0,83	0,99	1,16	1,33	1,53	1,77	2,11	3,00	3,72
600	Vertical...	0,21	0,42	0,63	0,86	1,11	1,39	1,70	2,10	2,69	4,38	6,23
	Horizontal.	0,20	0,41	0,62	0,85	1,09	1,36	1,68	2.07	2,65	4 32	6,15
	Absolu...	0,75	1,09	1,38	1,64	1,93	2,21	2,54	2,93	3,50	4,98	6,48

En comparant entre eux les résultats observés et les résultats calculés, on reconnaît qu'ils s'accordent exactement dans un grand nombre de cas, et que, dans les autres, ils ne s'écartent entre eux que de quantités assez faibles, tantôt dans un sens, et tantôt dans l'autre; on conclut de là que ces différences ne sont que des inégalités résultant d'un trop petit nombre d'observations.

On atténue beaucoup les différences par la multiplicité des observations. On peut, à cet effet, rapporter les limites des observations à un même moyen écart, pris pour unité, en divisant chacune d'elles par le moyen écart observé. On a ainsi deux limites pour chacune des trois distances, ce qui fait, pour chacune des probabilités 0,1, 0,2..., 6 nombres dont on peut prendre la moyenne pour la comparer au résultat des formules. On a opéré de même en ce qui concerne les écarts absolus. Les résultats sont contenus dans le tableau ci-après.

DIRECTION des ÉCARTS.	NATURE des RÉSULTATS.	LIMITES DES ÉCARTS, RAPPORTÉES AU MOYEN ÉCART PRIS POUR UNITÉ, ET DONT LA PROBABILITÉ EST									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
		m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
Écarts verticaux et horizontaux.	Moyenne générale. . .	0,09	0,22	0,38	0,54	0,68	0,84	1,04	1,28	1,63	2,72
	Limite calculée. . . .	0,12	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1,04	1,28	1,64	2,66
Écarts absolus rapportés à 1.	Moyenne observée. . .	0,33	0,49	0,63	0,75	0,84	0,95	1,05	1,23	1,44	2,13
	Limite calculée. . .	0,33	0,47	0,60	0,71	0,83	0,96	1,10	1,27	1,52	2,14

Les nombres renfermés dans ce tableau résultant, soit de l'observation, soit des formules, ne présentent entre eux que des différences très-peu importantes et qui ne dépassent pas les limites de la précision des observations, de sorte qu'on peut regarder comme suffisamment exactes ces formules, et la loi des écarts sur laquelle elles sont fondées.

La représentation graphique de ces formules et des résultats d'observations est donnée dans les figures 6, 7, 8, 9. Sur l'axe des abscisses, on a pris, à l'échelle de 100^{mm} pour une unité, les

probabilités 0,1, 0,2..., puis, pour chacune d'elles, on a porté, pour la première distance, celle de 200^{m} (*fig.* 6), parallèlement aux ordonnées, les limites correspondantes des écarts horizontaux, et on a joint les points successifs. Sur la même parallèle, on a porté les limites calculées, et on a joint les points par une ligne continue qui représente ainsi la formule; on a fait de même pour les écarts verticaux et pour les écarts absolus. On a répété la même opération pour les écarts aux distances de 400^{m} (*fig.* 7) et de 600^{m} (*fig.* 8), et enfin, on l'a fait pour les limites moyennes aux trois distances, tant pour les écarts verticaux ou horizontaux, que pour les écarts absolus (*fig.* 9).

On reconnaît facilement que les courbes résultant des formules représentent la loi des limites, aussi bien que le permettent les irrégularités inévitables dans un tir d'un nombre restreint de coups, et qu'ainsi ces formules se trouvent vérifiées.

Une vérification semblable a été faite sur le tir des balles sphériques avec un pistolet à canon rayé en hélice, sur une série de 250 coups à la distance de 100^{m}, la balle ayant un diamètre de 0^{m}01635, la charge pesant un gramme, la vitesse initiale étant 134$^{m:s}$ et celle du mouvement de rotation, de 248 tours par seconde. Les résultats sont contenus dans le tableau ci-après:

NATURE des RÉSULTATS.	DIRECTION des ÉCARTS.	LIMITES DES ÉCARTS CORRESPONDANT AUX PROBABILITÉS DE									MOYEN ÉCART.
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
		m	m.	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
Observés...	Vertical (*)..	0,12	0,20	0,32	0,40	0 50	0,59	0,67	0,79	0,89	0,6592
	Horizontal	0,08	0,17	0,31	0,41	0,51	0,64	0,69	0,80	0,89	0,5023
Calculés...	Vertical...	0,10	0,21	0,32	0,42	0,55	0.68	0,84	1,04	1,33	»
	Horizontal.	0,09	0,18	0,27	0,37	0,48	0,60	0,73	0,91	1,16	»

24. *Comparaison entre les formules qui précèdent et celles qui ont été données par divers auteurs.*

L'illustre Poisson, dans les *formules de probabilité relatives*

(*) Les résultats de ce tir, fait à la demande de l'illustre Poisson, sont rapportés dans mon Mémoire *Expériences de tir avec des balles sphériques plates et longues*, inséré au *Journal de l'École polytechnique*, 27e cahier, 1829.

au résultat moyen des observations (*), dit : « Si l'on fait, pour « chaque fusil, la somme des carrés des distances des balles « au centre de la cible, et qu'on divise cette somme par le *carré* « du nombre des coups, le meilleur fusil sera celui pour lequel « ce quotient sera le plus petit ; le nombre de coups étant très- « grand... Un soldat sera plus adroit qu'un autre si, avec la « même arme,... le quotient dont il s'agit est moindre pour le « premier soldat que pour le second. »

D'après ce qui a été dit, le terme de comparaison à choisir entre deux tirs est la somme des carrés des écarts divisée par *leur nombre* et non par le *carré de ce nombre.* Il y a donc une erreur qui a échappé au savant géomètre ; il est en effet facile de comprendre que pour que cette expression de Poisson pût représenter les qualités de deux armes, il faudrait que le nombre de coups tirés fût exactement le même dans les deux tirs; car, si, après avoir pris le quotient $\frac{\Sigma a^2}{n^2}$ sur n coups, on répète l'expérience en tirant n nouveaux coups, n étant très-grand, la somme des carrés des écarts nouveaux, ou l'expression $\frac{\Sigma a'^2}{n^2}$ devra être sensiblement égale à la première, puisque l'arme et les circonstances sont supposées les mêmes. Mais, si l'on fait la comparaison sur les $2n$ coups, le terme de comparaison sera $\frac{\Sigma a^2 + \Sigma a'^2}{(2n)^2}$ ou sensiblement $\frac{1}{2}\,\frac{\Sigma a^2}{n^2}$ ce qui est très-différent, tandis que, d'après ce que nous avons dit, on aurait eu $\frac{\Sigma a^2 + \Sigma a'^2}{2n}$ ou sensiblement $\frac{\Sigma a^2}{n}$.

Poisson donne ensuite une formule pour calculer la probabilité de frapper une cible circulaire de rayon déterminé; f^2 étant la somme des carrés des distances au centre des n coups tirés sur une autre cible, r le rayon de la nouvelle cible, la quantité α satisfaisant à l'équation $\frac{2\alpha f}{n} = r$, donnera p déterminé par la relation $p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2}\, dt.$

(*) *Mémorial d'artillerie,* n° 3, 1830, pag. 154.

De la première, on tirera $\alpha=\frac{rn}{2f}$ et, par conséquent, on aura $p=\varphi\left(\frac{rn}{2f}\right)$; telle est la formule de Poisson.

Nous avons trouvé, pour la probabilité d'atteindre une cible de rayon r, l'expression $P=1-e^{-\frac{r^2}{l^2}}$. Celle-ci a été confirmée par son rapprochement avec celle de la probabilité d'atteindre un carré de même superficie, lorsque $\frac{r}{l}$ n'est pas grand, laquelle est (art. 19):

$$P=\left[\varphi\left(\frac{r}{l}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right]^2$$

Dans la formule de Poisson $\frac{f^2}{n}$ est ce que nous avons désigné par l^2 d'où $f=l\sqrt{n}$; par conséquent sa formule deviendra:

$$p=\varphi\left(\frac{r}{l}\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

Cette formule de Poisson, comparée à la précédente, contient n à la place de π et $\varphi(\alpha)$ à la première puissance et non à la seconde. Elle présente le défaut de dépendre du nombre n d'observations dans chaque cas, de sorte que, si au lieu d'un nombre n de coups, on eût fait l'épreuve qui donne l sur un nombre $2n$, la valeur de l ne varierait pas sensiblement, et cependant la probabilité p, déduite de la formule de Poisson, deviendrait $p=\varphi\left(\frac{r\sqrt{2}}{l}\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$. Valeur plus grande que la précédente et égale à celle qui résulterait d'un rayon $r\sqrt{2}$. Ce défaut est analogue à celui qui a été signalé précédemment dans la comparaison des deux armes. Le facteur, $\sqrt{n}$ qui reste dans cette formule doit d'ailleurs donner des valeurs exagérées lorsque n est grand.

En appliquant cette formule au tir de 100 coups de canon de 16, à la distance de 200^m, qui a donné $l=0^m5235$, en prenant $r=0^m17$, on trouve $\alpha=\frac{0,17.10}{0,5235.2}=1,62$; de là, $p=\varphi(1,62)=$ 0,978. Il y aurait donc presque certitude d'atteindre, tandis que l'expérience, d'accord avec notre formule, donne $p=0,10$.

Poisson n'ayant pas indiqué ce qui l'a conduit à cette for-

mule, on ne saurait fixer la cause de l'erreur. Cependant, si l'on compare la formule à celle qui donne la probabilité de toucher une bande verticale de largeur $2s$, laquelle est $p = \varphi\left(\frac{s}{h\sqrt{2}}\right)$, il semblerait que Poisson a fait confusion entre les écarts absolus relatifs au centre; et les écarts relatifs à la verticale, en même temps qu'il divisait f^2 par n^2 et non par n.

25. *Formule de M. Hélie.*

M. Hélie, dans un mémoire publié en 1854 (*), arrive à cette formule :

$$p = 1 - \left(\frac{3q - r}{3q}\right)^2$$

dans laquelle $3q$ est la déviation extrême, r le rayon du cercle que l'on considère, et p la probabilité de l'atteindre. Dans le tir du canon de 16 à 200^m, sur 100 coups, le plus grand écart a été 1^m13 d'où $3q = 1^m13$; pour $r = 0,17$ qui, d'après l'expérience, donne $p = 0,10$, on trouve $p = 0,28$, près de 3 fois trop fort. Pour $r = 0^m105$, on trouve un nombre près de 4 fois trop fort. On a fait le même calcul pour les autres rayons et on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

Rayons des cercles (mèt.).	0,105	0,17	0,25	0,31	0,37	0,44	0,50	0,57	0,66	0,79	1,12
Probabilité d'atteindre — observée.	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99
Probabilité d'atteindre — calculée.	0,18	0,28	0,39	0,47	0,55	0,63	0,69	0,75	0,82	0,91	0,999

Les résultats de la formule de M. Hélie ne s'accordent pas avec ceux de l'observation, et l'erreur croît à mesure que le rayon diminue; ils ne s'accordent que pour les cercles qui comprennent presque tous les coups. La formule a d'ailleurs le défaut saillant de faire croître la chance d'atteindre comme les rayons, tant qu'ils restent très-petits; tandis que réellement ils doivent croître comme l'aire du cercle, ou comme le carré du rayon car, mis sous la forme $p = \frac{2r}{3q} - \left(\frac{r}{3q}\right)^2$, la formule se réduit sensiblement à $\frac{2r}{3q}$, lorsque $\frac{r}{q}$ est très-petit.

L'erreur provient de ce que l'auteur a pris pour la probabilité

(*) *Mémoire sur la probabilité du tir des projectiles de l'artillerie navale*, par Hélie, Imprimerie impériale, 1854.

des écarts la loi déterminée par la courbe A I B (*fig.* 10) (*), ayant un point d'inflexion en I et qu'il la remplace par une ligne droite C D; tandis qu'en réalité la loi de la probabilité des écarts du centre en tous sens ou des écarts absolus, c'est-à-dire la probabilité de toucher une bande annulaire de grandeur donnée très-petite, doit être représentée par une courbe de la forme O P Q passant par l'origine.

Cela d'ailleurs est facile à voir, même sans connaître les formules exactes. En effet : la probabilité d'atteindre un cercle de rayon r est nulle pour $r = o$, puisque la circonférence est égale à zéro, et elle croît d'abord proportionnellement à la circonférence ou au rayon. La courbe a donc une première partie inclinée et passant par l'origine. Elle croît ensuite moins rapidement jusqu'au point où l'augmentation de la circonférence est compensée par la diminution de la probabilité; la courbe a donc un sommet à une certaine distance de l'origine. A partir de là, elle se rapproche de la ligne des abscisses pour ne la rencontrer qu'à une distance égale au plus grand écart qui peut se présenter (*fig.* 5).

La forme de la courbe donnée par M. Hélie appartient à la probabilité des écarts d'une droite verticale tracée sur la cible, mais non pas à la probabilité des écarts absolus d'un point, ou des écarts en tous sens.

26. *Relation entre le moyen écart et l'écart moyen.*

Dans les expériences de tir, on s'est généralement contenté jusqu'ici de former la moyenne arithmétique des écarts pour apprécier le degré de dispersion des points d'impact, sans égard à l'avantage plus grand que pouvait avoir la moyenne des carrés des écarts, quoique plus longue à former. Ces deux quantités, en conséquence de la loi des écarts que nous avons vérifiée et adoptée, ont un rapport qu'il est important de déterminer.

Soit, pour un très-grand nombre n de points d'impact, h leur moyen écart de la verticale, x la distance d'une bande parallèle à cette même ligne d'une largeur dx et du côté des x positifs;

(*) Mémoire cité, pag. 20, *fig.* 3.

soit u le nombre des points d'impact qu'elle comprend, on aura (art. 13) :

$$u = \frac{n}{h\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2h^2}} . dx.$$

Chacun de ces points d'impact étant à une distance x, la somme de ces distances ou de ces écarts sera $u x$, et la somme totale de tous les écarts sera l'intégrale de $u x$, depuis zéro jusqu'à l'infini positif ; il en sera de même quant aux écarts du côté des x négatifs ; par conséquent, la somme de tous les écarts comptés positivement sera égale à

$$2\,\frac{n}{h\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} . x\, dx.$$

Cette intégrale, prise entre les limites indiquées, est égale à

$$n h \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Le quotient de cette somme, par le nombre total n des écarts, donnera l'*écart moyen* (arithmétique) que nous désignerons par H et qui sera

$$H = h\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2h^2}{H^2} = \pi,$$

c'est-à-dire que le double du quotient de la moyenne des carrés des écarts par le carré de l'écart moyen est égal au rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi donc, si la loi des écarts adoptée pour représenter les écarts dans le tir des armes à feu est exacte, on pourrait, par l'observation des points d'impact d'un grand nombre de coups, retrouver le rapport approché de la circonférence au diamètre. Ce résultat singulier a de l'analogie avec la probabilité qu'une aiguille qu'on laisse tomber au hasard sur un plan portant des droites parallèles, rencontre une de ces lignes, laquelle dépend de la valeur de π.

Il était intéressant de vérifier si cette relation est confirmée par l'expérience, nous l'avons fait sur les nombreux résultats du tir des balles dans le pistolet d'officier de cavalerie à canon rayé aux distances de 50^m et de 100^m, ainsi que sur le tir du canon de 16 aux distances de 200^m, 400^m et 600^m. Les résultats de cette comparaison sont exposés dans le tableau ci-après :

TABLEAU *comparatif du moyen écart et de l'écart moyen des projectiles, sur une cible verticale.*

DÉSIGNATION des PROJECTILES.	DIS-TANCES du but.	NOMBRE de COUPS.	DIRECTION des ÉCARTS.	MOYEN écart h.	ÉCART moyen H	RAPPORT $\frac{2h^2}{H^2}$	RAPPORT MOYENNE.
	m.			m.	m.		
Balles de plomb. — Sphériques.	100	100	Horizontal. . .	0,709	0,570	3,09	3,14
			Vertical. . . .	0,812	0,642	3,29	
	50	75	Horizontal. . .	0,1864	0,1452	3,28	3,25
			Vertical. . . .	0,2096	0,1652	3,32	
Aplaties.	100	100	Horizontal. . .	0,728	0,581	3,10	3,18
			Vertical. . . .	0,665	0,519	3,29	
	50	50	Horizontal. . .	0,206	0,1446	3,85	3,52
			Vertical. . . .	0,221	0,1747	3,20	
Allongées.	50	50	Horizontal. . .	0,474	0,350	3,62	3,44
			Vertical. . . .	0,383	0,300	3,26	
— Boulet de 16.	200	100	Horizontal. . .	0,348	0,266	3,43	3,08
			Vertical. . . .	0,407	0,325	3,14	
	400	100	Horizontal. . .	0,846	0,782	2,34	
			Vertical. . . .	1,062	0,809	3,45	
	600	100	Horizontal. . .	1,617	1,343	2,90	
			Vertical. . . .	1,672	1,324	3,19	

Les résultats contenus dans ce tableau font voir que quand le nombre des observations est assez considérable, le rapport $\frac{2h^2}{H^2}$ qu'on en déduit ne s'écarte que très-peu de celui de la circonférence au diamètre. Pour 100 observations, la différence n'a été que de 0,01 à 0,02 de la valeur. Pour des nombres de 50 observations, la différence a été un peu plus grande, mais elle n'a pas dépassé un dixième de la valeur.

Cet accord confirme de nouveau l'exactitude de la loi des écarts adoptée, et montre qu'au moyen de l'observation des points touchés dans le tir d'une arme à feu, on pourrait obtenir un rapport approché de la circonférence au diamètre.

Dans des observations nombreuses, on pourra également, ayant l'écart moyen, obtenir le moyen écart sans faire les carrés des écarts à chaque coup.

Dans la recherche de la probabilité des erreurs d'une moyenne mesure, si s est la limite des écarts dont la probabilité est p,

et si l'on fait $p = \varphi(\alpha)$, on a, comme on sait, $s = \alpha h \sqrt{\frac{2}{n}}$, d'ou l'on déduit $s = \alpha H \sqrt{\frac{\pi}{n}}$; cette relation est remarquable.

27. *Écart moyen absolu.*

On trouve également une relation simple entre l'écart moyen absolu et le moyen écart absolu, pris relativement au point d'impact moyen.

En effet, la probabilité d'atteindre une zone circulaire dont le rayon est ρ et la largeur $d\rho$ est (art. 17) :

$$p' = \frac{2\rho d\rho}{l^2} e^{-\frac{\rho^2}{l^2}}.$$

Sur un très-grand nombre de coups tirés, cette zone sera atteinte le plus probablement par un nombre $np' = \frac{2n\rho}{l^2} e^{-\frac{\rho^2}{l^2}}.d\rho$. La somme des écarts des projectiles qui ont atteint cette zone sera $np'\rho$, ou

$$\frac{2n\rho^2}{l^2} e^{-\frac{\rho^2}{l^2}}.d\rho$$

La somme des écarts de tous les coups est l'intégrale de cette expression depuis 0 jusqu'à l'infini ; et, en la divisant par n, on aura pour l'écart moyen absolu L :

$$L = \frac{2}{l^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{l^2}} \rho^2.d\rho$$

de laquelle on tire, par des moyens connus :

$$L = l \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Comme on a, lorsque $h = k$,

$$l = h\sqrt{2} \quad \text{et} \quad H = h\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

on aura :

$$h = H\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = L\sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

ou :

[16] $$h^2 = \pi \frac{H^2}{2} = \frac{l^2}{2} = \frac{2L^2}{\pi}$$

Cette relation suppose seulement que les nombres sont assez grands. Voici les valeurs numériques qui entrent dans ces relations :

$$\sqrt{2} = 1,414214 ; \quad \sqrt{0,5} = 0,707107$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,7977845 ; \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,8862270$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,253303 ; \quad \sqrt{\pi} = 1,7724540$$

Ces relations seront particulièrement utiles lorsqu'il s'agira d'observations pour lesquelles on n'aura que les moyennes arithmétiques des écarts, et pour des observations courantes, lorsqu'on voudra se contenter de relever l'écart moyen horizontal et vertical.

28. *Somme des écarts relativement à une ligne parallèle à l'un des axes.*

Connaissant la somme des écarts des points d'impact relativement à une ligne, on l'obtient relativement à une autre ligne parallèle sans calculer les écarts relatifs à cette nouvelle ligne. Supposons un déplacement d parallèlement à la verticale, du côté des x positifs, soit $a_1, a_2 ., a_u$ les écarts de ce même côté, supposés rangés par ordre de grandeur, u leur nombre, $\Sigma^u a$ leur somme ; $a_1', a_2' ... a_v'$ les écarts du côté des x négatifs, v leur nombre, $\Sigma^v a'$ leur somme ; $u + v = n$, on aura :

$$H = \frac{\Sigma^u a + \Sigma^v a'}{n}$$

Soit s le nombre des écarts positifs inférieurs à d, et qui, par suite du déplacement de la ligne, passeront du positif au négatif, et $\Sigma^s a$ leur somme ; il est facile de voir que la somme des écarts positifs sera diminuée de la somme $\Sigma^s a$ des s plus petits écarts, et que chacun des autres le sera de d, et leur somme de $(u - s)d$. La somme des écarts négatifs, par suite des s écarts positifs plus petits que d et qui deviennent négatifs, sera augmentée de $\Sigma^s(d - a) = sd, - \Sigma^s a$; tous les autres écarts seront diminués

de d, et leur somme de vd. Par conséquent, la somme de tous les écarts positifs ou négatifs, sans distinction de signes, sera :

$$\Sigma'' a + \Sigma' a' + s\,d - \Sigma^s a + v\,d - \Sigma^s a - (u - s)\,d$$

ou

$$\Sigma'' a + \Sigma' a' + 2(s\,d - \Sigma^s a) - (u - v)\,d.$$

L'augmentation de la somme des écarts est donc $2(s\,d - \Sigma^s a) - (u - v)\,d$. Le premier terme de cette augmentation est toujours positif.

L'écart moyen H′ relatif à la nouvelle ligne sera :

$$[17] \qquad H' = H + \frac{1}{n}\left[\left(2s - (u - v)\right)d - 2\Sigma^s a\right]$$

Cette règle est moins simple, sans doute, que celle qui donne le moyen écart relatif à une ligne, d'après le moyen écart relatif à une autre ligne parallèle (art. 2, éq. 4); mais son application permettra néanmoins d'éviter de longs calculs numériques.

29. *Écart moyen et moyen écart sur un nombre limité d'observations.*

Ayant un grand nombre de mesures d'une même chose, de la hauteur d'un projectile à la cible dans un même tir, par exemple, si l'on divise ces mesures en séries et que dans chacune d'elles on prenne la hauteur moyenne et le moyen carré des écarts, la moyenne de ces moyens carrés ne sera pas la même que le moyen carré des écarts pris relativement à la moyenne de toutes les hauteurs ; celui-ci sera toujours plus grand.

En effet : supposons qu'on ait m séries de n observations des hauteurs d'un projectile sur une cible verticale ; soit $B_1, B_2 \ldots, B_m$, les hauteurs moyennes de chaque série, $k_1, k_2 \ldots, k_m$ les moyens écarts correspondants ; soit B la moyenne arithmétique des quantités $B_1, B_2 \ldots, B_m$; elle sera la même que la moyenne des mn hauteurs observées (art. 6). Soit encore $\beta_1 = B_1 - B$; $\beta_2 = B_2 - B \ldots$ $\beta_m = B_m - B$; et enfin k le moyen écart des mn hauteurs pris relativement à B.

Dans la première série, la somme des carrés des écarts relativement à la hauteur B_1 étant $n k_1^2$, elle sera $n(k_1^2 + \beta_1^2)$ si l'on prend les écarts relativement à la hauteur moyenne générale

B (art. 2). Dans la seconde série, la somme des carrés des écarts pris relativement à la moyenne générale B sera $n\,(k_2^2+\beta_2^2)$; et de même dans les autres séries ; on aura donc, pour la somme des carrés des écarts des $m\,n$ observations :

$$mnk^2 = n\,(k_1^2 + k_2^2 \ldots + k_m^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 \ldots\ldots \beta_m^2)$$

d'où

$$k^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2 \ldots\ldots k_m^2}{m} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 \ldots\ldots \beta_m^2}{m}$$

Ainsi, la moyenne somme des carrés des écarts pris relativement au point d'impact moyen général est égale à la moyenne des moyens carrés des écarts pris relativement au point d'impact moyen dans chaque série, augmenté du moyen carré des distances des divers points d'impact moyen des séries au point d'impact moyen général. Cette dernière quantité est toujours positive.

Si donc, pour avoir k^2, on se contentait de prendre la moyenne des m valeurs de k_1^2, $k_2^2 \ldots\ k_m^2$, on serait conduit à une erreur constante en dessous ; et, lorsqu'à défaut de plusieurs séries, l'on ne prendra le moyen carré que sur une seule, on aura à craindre en outre une erreur comme celle que laisse craindre une observation particulière, comparativement à la moyenne de l'ensemble des observations. Par conséquent, en ne prenant qu'une série, on aura plus de chances d'être au-dessous de la vérité qu'au-dessus.

Il importe de pouvoir déterminer cette erreur constante pour corriger les moyennes qui ne seraient prises que sur des nombres restreints d'observations. La règle de Laplace sur la limite des erreurs dont la probabilité est donnée, en fournit le moyen.

En effet, si l'on ne connaît pas les valeurs particulières de β_1, $\beta_2 \ldots$ relatives à chaque série, puisqu'on n'a fait qu'une seule série d'épreuves, on peut avoir une valeur approchée de leur moyenne, en cherchant quelle est la limite des écarts dont la probabilité est *un demi*. Ce sera la valeur qui laisserait généralement autant d'écarts en dessus qu'en dessous, caractère de la moyenne sur un grand nombre d'observations. Or, pour la probabilité $p = \frac{1}{2}$ ou $\varphi\,(\alpha) = \frac{1}{2}$, on a $\alpha = 0{,}477$; donc la limite s de ces erreurs sur n observations est

$$s = 0{,}477\sqrt{\frac{2}{n}}\,k = \frac{1}{\sqrt{n}}\,.\,0{,}675\,k\,, \quad \text{et} \quad s^2 = \frac{0{,}455}{n}\,k^2.$$

D'après cela, la moyenne des carrés des écarts pris sur un nombre n d'observations étant k^2, le moyen carré des écarts relatifs au point d'impact moyen d'un nombre indéfini d'observations sera :

$$[18] \qquad k^2\left(1+\frac{0,455}{n}\right)$$

et le moyen écart sera $k\sqrt{1+\frac{1}{n}0,455}$, ou à très-peu près $k\left(1+\frac{1}{n}0,227\right)$, quand n est grand. Si l'on suppose à n une suite de valeurs consécutives, on trouvera que les valeurs de k^2 et de k doivent être augmentées d'une fraction de leur valeur indiquée dans le tableau suivant :

NOMBRE d'observations.	CORRECTION ADDITIVE pour		NOMBRE d'observations.	CORRECTION ADDITIVE pour	
	k^2	k		k^2	k
8	0,0569	0,0283	100	0,0045	0,0022
10	0,0455	0,0225	125	0,0036	0,0018
15	0,0307	0,0142	150	0,0031	0,0016
20	0,0227	0,0113	200	0,0023	0,0011
25	0,0187	0,0091	250	0,0018	0,0009
50	0,0091	0 0045	500	0,0009	0,0005
75	0,0061	0,0030	1000	0,0005	0,0002

L'on voit que quand l'on n'a que 20 ou 25 observations, le moyen écart qu'on en déduit doit être augmenté d'environ 0,01 de sa valeur, et son carré de 0,02. Pour 10 observations, la correction serait d'un peu plus du double.

Pour comparer entre eux des moyens écarts pris sur deux nombres inégaux d'observations, il faudrait augmenter celui qui résulte du plus petit nombre de coups proportionnellement à la différence des fractions du tableau ci-dessus correspondant à ces deux nombres ; ainsi, des moyens écarts pris sur 10 observations devront être augmentés de 0,020 de leur valeur pour être comparables au moyen écart pris sur 100; les moyens écarts pris sur 20 devraient l'être de 0,009 seulement ; des moyens écarts pris sur 25 observations, pour être comparables à des moyens écarts pris sur 125 ou sur 250 observations, devront être augmentés

respectivement de 0,0073 et 0,0082 de leur valeur. C'est une correction à laquelle on doit avoir égard lorsque l'on doit comparer la justesse de tir de deux armes, ou l'habileté de deux tireurs, et que le nombre de coups, dans chaque épreuve, n'est pas le même.

Mais cette condition n'est plus nécessaire lorsque l'on veut comparer l'habileté de deux tireurs et que l'on est convenu de compter les écarts à partir d'un point fixe, comme le centre d'une cible, et que les tireurs visent de manière à atteindre ce point.

La somme des écarts rapportés à la mesure moyenne des mesures observées n'est pas nécessairement un minimum, comme la somme des carrés des écarts ; de sorte que quand l'on déplace, parallèlement à elle-même, la ligne à laquelle on rapporte les écarts, la somme de ces écarts ne va pas toujours en augmentant ; elle peut rester constante ou même aller en diminuant (art. 28, équat. 17) ; mais, il y a toujours un déplacement à partir duquel la somme des écarts va en augmentant d'une manière continue. Il résulte de là, contrairement à ce qui a lieu pour les carrés des écarts, que la somme des écarts pris séparément dans diverses séries des mesures relativement à la moyenne des mesures de chacune d'elles n'est pas toujours plus petite que la somme des écarts des mêmes mesures, prise relativement à la mesure moyenne générale sur l'ensemble. Cependant, si la somme n'augmente pas pour chaque série en particulier, elle augmente en général pour l'ensemble ; mais l'augmentation est moins régulière que quand il s'agit du moyen écart.

L'analyse peut donner la correction la plus avantageuse à apporter aux écarts moyens sur un nombre restreint de mesures, lorsqu'on connaît la loi des écarts. Pour ce qui concerne les écarts, dans le tir des projectiles, on s'est contenté ici de déterminer cette correction par l'observation, et l'on a trouvé, sur les séries d'observations rapportées plus haut, que la somme des écarts devait être augmentée de la même fraction de sa valeur que la somme des carrés des écarts ; et, par conséquent, que l'écart moyen doit être augmenté d'une fraction deux fois plus grande que le moyen écart, lorsque, d'ailleurs, le nombre des observations est le même.

Cette circonstance explique pourquoi, à mesure que l'on considère des observations de moins en moins nombreuses, le rapport $\frac{2h^2}{H^2}$ augmente de plus en plus. En effet, pour un nombre n d'observations, les facteurs corrigés devant donner un rapport constant, on devra avoir :

$$\frac{2h^2\left(1+\frac{1}{n}0,455\right)}{H^2\left(1+\frac{1}{n}0,455\right)^2}=\frac{2h^2}{H^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}\,0,455}=\text{const.}$$

Le second facteur diminuant avec n, il faut nécessairement que le premier augmente.

Les observations du tir de 100 boulets de 16 aux distances de 200ᵐ, 400ᵐ et 600ᵐ, et celle de 125 et 250 balles de pistolet, aux distances respectives de 50ᵐ et de 100ᵐ, fournissent une vérification des formules qui viennent d'être établies.

Dans les premières, les écarts ayant été d'abord pris relativement à la verticale et à l'horizontale qui passe par le point d'impact moyen sur les 100 boulets, on a pris leur somme et leur moyenne, la somme de leurs carrés et leur moyen carré ainsi que le moyen écart. On les a ensuite divisées en séries de 10 dans l'ordre du tir, et on a calculé la somme des écarts et des carrés des écarts pris relativement au point d'impact moyen, par séries, puis, la somme et la moyenne des résultats de chaque série. Ce calcul s'est fait au moyen des formules indiquées plus haut (art. 2 et 28). On a opéré de même par séries de 20.

Les observations sur le tir des balles ont été divisées par séries de 25 et comparées de la même manière.

On a en outre comparé les écarts moyens, et les moyens écarts, pris par séries, aux quantités analogues prises sur l'ensemble; on a également calculé le rapport $\frac{2h^2}{H^2}$ et $\frac{2k^2}{K^2}$ et on a obtenu les résultats renfermés dans le tableau ci-après.

Tableau *des écarts moyens et des moyens écarts pris sur des nombres différents d'observations.*

		Écart moyen.		Moyen écart.		$\frac{2h^2}{H^2}$	$\frac{2k^2}{K^2}$
		Horizontal *h*.	Vertical *k*.	Horizontal H.	Vertical K.		
		m	m	m	m		
Boulet de 16 à 200 m.	1 série de 100.	0,2661	0,3252	0,348	0,407	3,43	3,14
	5 séries de 20.	0,251	0,324	0,333	0,4067	3,53	3,16
	10 séries de 10.	0,223*	0,301	0.3295	0,3936	4,37	3,43
Rapport des moy. sur 10 et sur 100 .		0,865	0,927	0,948	0,968	1,28	1,09
400 m.	1 série de 100.	0,7816	0,809	0,8455	1,0620	2,34	3,45
	5 séries de 20.	0,760	0,808	0,8436	1,0619	2,47	3,46
	10 séries de 10.	0,718	0,801	0,8382	1,0610	2,73	3,52
Rapport des moy. sur 10 et sur 100 .		0,996	0,990	0,993	0,999	1,05	1,02
600 m.	1 série de 100.	1,3431	1,3235	1,6172	1,6725	2,90	3,19
	5 séries de 20.	1.3265	1,3028	1,6160	1.6724	2,98	3,30
	10 séries de 10.	1,2734	1,2907	1,6081	1,6694	3,07	3,37
Rapport des moy, sur 10 et sur 100 .		0,990	0,975	0,995	0,998	1,05	1,05
Balles de pistolets à 50 m.	1 série de 125.	0,1452	0,1658	0,1861	0,2098	3,28	3,20
	5 séries de 25.	0,1410	0,1661	0.1857	0,2078	3,47	3,13
Rapport.		0,896	1,000	0,997	0,990	1,06	»
à 100 m.	1 série de 250.	0,5813	0,6660	0,7091	0,8122	2,98	2,98
	10 séries de 25.	0,5396	0.6406	0,7038	0.8086	3,41	3,18
Rapport.		0,928	0,970	0,992	0,993	1,17	1,07

(*) Irrégulier.

Les résultats renfermés dans le tableau ci-dessus font voir que, comme l'indiquent les formules ; 1° les moyens écarts sont d'autant plus grands qu'ils sont pris sur un plus grand nombre d'observations ; 2° les moyennes, prises sur 10 boulets, horizontalement et verticalement, aux trois distances, sont les fractions respectives ci-après des moyens écarts pris sur 100, savoir : 0,948, 0,968, 0,993, 0,999, 0,995, 0,998, ou en moyenne 0,984, c'est-à-dire 0,016 au-dessous de l'unité ; la formule donne 0,020, la différence est négligeable. Les écarts moyens pris par séries de 10 boulets sont en moyenne 0,957 des écarts moyens pris sur 100, c'est-à dire d'environ 0,04 au-dessous, comme l'indique la formule. De même, dans le tir des balles au pistolet, les moyens écarts par séries de 25 balles sont de 0,07 et 0,08 au-dessous des écarts sur 125 et 250, comme

l'indique la formule; celle-ci se vérifie aussi par les écarts moyens.

On remarque le même accord dans le rapport $\frac{2h^2}{H^2}$ et $\frac{2k^2}{K^2}$; car la formule indique que si on le prend par séries de 10 coups et de 100 coups, le premier serait 1,041 du second; l'observation donne en moyenne 1,05 pour trois d'entre eux; le quatrième présente une inégalité qui provient d'une irrégularité déjà signalée. On trouve des résultats analogues dans les rapports pris sur des séries de 25 balles comparées aux séries sur 125 et 250. La quantité $\frac{2h^2}{H^2}$ croissant ainsi à mesure qu'elle se rapporte à un moindre nombre d'observations, ce ne serait que sur un très-grand nombre d'observations qu'on verrait se réaliser plus sûrement le rapport remarquable $\frac{2h^2}{H^2} = \pi$.

La considération des carrés des écarts qui nous permet de corriger les résultats d'observations peu nombreuses a encore sur les simples écarts l'avantage de plus de régularité, lorsque le nombre d'observations n'est pas très-grand Pour le reconnaître, on a, dans chaque série, comparé le moyen écart sur 10 boulets horizontalement ou verticalement, à 200^m, 400^m et 600^m, à la moyenne des 10 séries; et, pour chacun, on a pris la différence à l'unité, en plus ou en moins, puis la moyenne de ces différences. On a trouvé qu'aux trois distances indiquées: les erreurs moyennes étaient respectivement 0,183, 0,185, 0,135. Ces différences prises de la même manière sur les écarts moyens ont été respectivement 0,238, 0,201, 0,209, lesquelles sont encore plus grandes que les différences moyennes prises sur les moyens écarts.

En opérant de la même manière sur les 5 séries par 20 coups, on trouve des différences qui sont respectivement 0,124 et 0,129, ce qui laisse encore un léger avantage à l'emploi des carrés des écarts. De même, sur les 10 séries de 25 coups comparés à la moyenne sur 250, on trouve respectivement 0,157 et 0,164 pour les erreurs moyennes, prises respectivement sur les moyens écarts ou les écarts moyens, l'avantage est donc toujours aux moyens écarts.

D'après ce qui vient d'être dit, l'on voit que, pour comparer

la justesse de tir de plusieurs armes différentes ou l'habileté de plusieurs tireurs, il est plus exact de considérer les carrés des écarts que les simples écarts, surtout quand le nombre des observations n'est pas très-considérable; dès que le nombre des observations atteint 25, l'avantage est très-faible, c'est une vérité qu'il était important de constater. La considération des carrés des écarts est donc à la fois plus exacte et plus commode; mais il ne doit pas y avoir d'exclusion pour les simples écarts, comme quelques auteurs l'ont pensé.

Les relations qui ont été établies permettent de passer facilement de l'écart moyen au moyen écart dès que le nombre d'observations n'est pas trop petit; la recherche de l'écart moyen pourra suffire dans bien des cas, et n'exigera que des calculs beaucoup plus simples.

Les relations que nous avons obtenues pour le tir à la cible sont applicables aux erreurs dans la détermination des autres quantités, par des observations plus ou moins multipliées, dès qu'on peut y appliquer la loi des écarts qui nous a servi de base.

30. *Sur la formule de Laplace qui donne la probabilité de l'erreur à craindre sur la moyenne arithmétique d'un nombre donné d'observations.*

La formule donnée par *Laplace* pour calculer la probabilité qu'une moyenne prise sur un grand nombre d'observations ne s'écarte de la véritable que d'une quantité donnée, revient à supposer que la probabilité d'un écart de la moyenne décroît comme une certaine puissance d'un nombre plus petit que l'unité, et que cette puissance est proportionnelle au carré de l'écart et en raison inverse du nombre de mesures sur lesquelles est prise la moyenne.

En effet, x étant un écart proposé, e^{-1} le nombre plus petit que l'unité adoptée (e étant la base des logarithmes népériens), n le nombre des observations, ε^2 une quantité qui dépend de la grandeur des écarts observés, et pour laquelle nous prendrons la moyenne de leurs carrés h^2; la probabilité que l'erreur est égale à x ou qu'elle ne dépasse x que d'une quantité infiniment petite dx, sera représentée par la formule

$$A e^{-\frac{nx^2}{\varepsilon^2}} . dx.$$

La probabilité que l'erreur ne dépasse pas une quantité proposée, soit en plus, soit en moins, sera donnée par l'intégrale de cette expression depuis la quantité proposée prise négativement jusqu'à cette même quantité prise positivement et divisée par cette même intégrale étendue depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif; en appelant p cette probabilité et s l'erreur à craindre qui y correspond, on aura

$$p = \frac{\int_{-s}^{+s} e^{-\frac{nx^2}{\varepsilon^2}} . dx}{\int_{-\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{nx^2}{\varepsilon^2}} . dx}$$

ou, en remplaçant $\frac{s\sqrt{n}}{\varepsilon}$ par α et $\frac{x\sqrt{n}}{\varepsilon}$ par t, et en remarquant que l'intégrale prise du côté des x positifs est la même que du côté des x négatifs, on aura

$$p = \frac{\int_{0}^{\alpha} e^{-t^2} . dt}{\int_{0}^{\infty} e^{-t^2} . dt}$$

or, le numérateur multiplié par $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ est ce que nous avons représenté par $\varphi(\alpha)$, le dénominateur est égal à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et que $\varepsilon^2 = h^2$; on aura donc :

$$p = \varphi(\alpha) \text{ et } s = \frac{\alpha h}{\sqrt{n}}$$

ce qui fait retomber sur la formule de Laplace.

Il est très-naturel d'admettre que la grandeur des erreurs à craindre est proportionnelle à la grandeur des erreurs observées, et nous avons indiqué les raisons qui motivent l'emploi de la moyenne des carrés des écarts observés; il est bien évident aussi qu'à mesure que les observations sont plus multipliées, la moyenne des mesures est plus près de la véritable, et il est assez naturel de faire croître la puissance comme ce nombre.

31. RÉSUMÉ DES FORMULES.

Le travail qui précède a reçu, en 1857, l'approbation du comité de l'artillerie, qui, dans l'intérêt du service de l'arme, a demandé qu'il fût publié : M. le ministre de la guerre a sanctionné ces mesures.

Pour faciliter l'application des formules de probabilité au tir des projectiles, j'en donne ici un résumé qui dispensera de recourir au texte; j'y ajoute, après une table indispensable, les résultats d'expériences du tir de boulets et de balles, à diverses distances, sur lesquelles les formules ont été vérifiées.

Moyennes entre plusieurs mesures.

$A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$, étant n mesures d'une même grandeur, les hauteurs observées des projectiles sur une cible, par exemple, la grandeur qui présente le moins de chances d'erreur est leur moyenne arithmétique :

$$[1] \qquad m = \frac{A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n}{n} = \frac{\Sigma A}{n} \qquad \text{(art. 1)}$$

Écarts de la moyenne.

Les écarts de cette mesure moyenne étant $a_1 = A_1 - m$, $a_2 = A_2 - m \ldots\ldots$, on aura pour ces écarts pris avec leurs signes :

$$\Sigma a = a_1 + a_2 \ldots\ldots a_n = o \text{ et } \Sigma a^2 = \Sigma A^2 - n m^2. \quad \text{(art. 2)}$$

on fait $\qquad k^2 = \frac{\Sigma a^2}{n} \quad$ ou $\quad k = \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{n}},$

Les écarts $\varepsilon = a - d$ relatifs à une hauteur $m + d$ donnent :

$$[4] \qquad \frac{\Sigma \varepsilon^2}{n} = k^2 + d^2 \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{\Sigma (a-d)^2}{n} - d^2.$$

k est le *moyen écart* (quadratique); il est distinct de la moyenne arithmétique entre les écarts g pris tous positivement, qu'on appelle *écart moyen*.

Erreur à craindre sur la moyenne entre un certain nombre de mesures.

En prenant la moyenne m pour la vraie valeur inconnue, d'une quantité dont on a observé n mesures, on a la probabilité p de ne pas s'en écarter de plus que la quantité s donnée par les relations

$$[5] \qquad p = \varphi(\alpha) \qquad \text{et} \qquad s = \alpha \sqrt{\frac{2}{n}}\, k. \qquad \text{(art. 3)}$$

Moyenne entre plusieurs autres moyennes.

Ayant plusieurs hauteurs moyennes m, m', m'', d'un projectile, provenant respectivement de n, n', n'', observations, la moyenne générale M à prendre sera :

1° Si les observations ont une égale précision, c'est-à-dire, si des moyens écarts k, k', k'' sont égaux ou peu différents

$$[6] \qquad M = \frac{nm + n'm' + n''m''.....}{n + n' + n'',....} \qquad \text{(art. 6)}$$

2° Lorsque k, k', k'' sont différents

$$[7] \qquad M = \frac{\frac{n}{k^2}m + \frac{n'}{k'^2}m' + \frac{n''}{k''^2}m''.....}{\frac{n}{k^2} + \frac{n'}{k'^2} + \frac{n''}{k''^2}.....} \qquad \text{(art. 6).}$$

La probabilité p que le résultat moyen M ne s'écarte pas de la vraie valeur de plus de S est, en faisant $p = \varphi(\alpha)$:

$$[8] \qquad S = \alpha \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{k^2} + \frac{n'}{k'^2} + \frac{n''}{k''^2}....,}}$$

Point d'impact moyen (art. 7).

$A_1, A_2..... A_n$ étant les distances horizontales des points d'impact résultant du tir d'un projectile, $B_1, B_2... B_n$, les hauteurs des mêmes points, relativement à un certain point d'une cible verticale ; les coordonnés du *point d'impact moyen* sont : $\alpha = \frac{\Sigma A}{n}$, $\beta = \frac{\Sigma B}{n}$.

Soit $a_1, a_2...$ les écarts horizontaux $b_1, b_2...$ les écarts verticaux et $c_1, c_2...$ les écarts absolus des points d'impact relativement au point d'impact moyen, on aura :

$$h = \left(\frac{\Sigma a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = \left(\frac{\Sigma b^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad l = \left(\frac{\Sigma c^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = (h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si l'on rapporte les écarts à un autre point dont les distances horizontales, verticales ou absolues sont respectivement d, f et g, les moyennes des carrés des nouveaux écarts seront respectivement :

$$h^2 + d^2; \quad k^2 + f^2; \quad l^2 + g^2.$$

Causes d'erreurs ou de déviations ajoutées aux causes préexistantes (art. 9).

Si h, k, l, sont les moyens écarts, sur une cible verticale, des projectiles d'une arme qui à l'aide de précautions spéciales est, à chaque coup, exactement dirigée sur le même point ; si h_1, k_1, l_1, sont les moyens écarts de la direction de l'arme estimés sur la même cible, lorsqu'on tire sans les mêmes précautions, les moyens écarts résultant de cette cause ajoutée à la première seront :

$$H = (h^2 + h_1^2)^{\frac{1}{2}} \quad K = (k^2 + k_1^2)^{\frac{1}{2}} ; \quad L = (l^2 + l_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Probabilité d'atteindre une surface limitée (art. 13 et 14).

La probabilité d'atteindre une *bande verticale* d'une très-petite largeur i et dont le milieu est à la distance x du point d'impact moyen, est :

$$p' = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

La probabilité que le projectile atteigne une bande verticale dont les bords sont à $\pm s$ du point d'impact moyen, est :

$$[9] \qquad P = \varphi\left(\frac{s}{h\sqrt{2}}\right)$$

De même, en ce qui regarde les distances à la ligne horizontale passant par le point d'impact moyen.

La probabilité de frapper un très-petit rectangle dont les côtés sont i et i', et les coordonnés du centre x et y, est :

$$[10] \qquad P' = \frac{i\,i'}{2hk\pi} e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)}$$

La probabilité d'atteindre un rectangle dont les demi-côtés, horizontaux et verticaux, sont s et s', et dont le centre est au point d'impact moyen, est :

$$[11] \qquad P = \varphi\left(\frac{s}{h\sqrt{2}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{s'}{k\sqrt{2}}\right)$$

Si s et s' ont entre eux le même rapport que h et k, ou si h et k étant égaux ou très-peu différents, la surface est *un carré*, la probabilité d'atteindre est :

$$[12] \qquad P = \left[\varphi\left(\frac{s}{h\sqrt{2}}\right)\right]^2 = \left[\varphi\left(\frac{s}{l}\right)\right]^2.$$

Lorsque h et k sont égaux ou peu différents, la probabilité P′ d'atteindre *une surface annulaire* de très-petite largeur dont le rayon moyen est r et la largeur i, est (art. 21) :

[15] $$P' = \frac{2ri}{l^2} e^{-\frac{r^2}{l^2}}.$$

La probabilité d'atteindre un cercle est (art. 17) :

[13 et 14] $$P = 1 - e^{-\frac{r^2}{l^2}} \quad \text{d'où} \quad r = l\sqrt{\log. \frac{1}{1-P}}$$

Voir les tables spéciales (art. 18).

Justesse du tir (art. 22). — C'est le rapport de la probabilité d'atteindre une surface de petites dimensions à l'aire de cette surface; c'est en général $\frac{1}{2\pi hk}$, et, lorsque h et k sont égaux ou peu différents, c'est $\frac{1}{\pi l^2}$.

Relation entre les moyens écarts h, k, l, *et les écarts moyens* H, K, L, (art. 26, 27).

1° Lorsque le nombre des observations est très-grand.

[16] $$h^2 = \pi\frac{H^2}{2} = \frac{l^2}{2} = \frac{2L^2}{\pi}$$

Lorsque le nombre n d'observations n'est pas très-grand, h^2, h et H doivent être corrigés et deviennent (art. 29) :

[18] $$h^2\left(1+\frac{0,455}{n}\right), \quad h\left(1+\frac{0,227}{n}\right), \quad H\left(1+\frac{0,455}{n}\right)$$

Si l'on déplace parallèlement à elle-même d'une quantité d, du côté des x positifs, la verticale à laquelle on rapporte les écarts horizontaux, s étant le nombre des écarts positifs plus petits que d, $\Sigma^s a$, leur somme, u et v, le nombre des écarts positifs et négatifs, et $n = u + v$ leur nombre total, l'écart moyen nouveau H′ sera (art. 28) :

[17] $$H' = H + \frac{1}{n}\left[(2s - (u - v))d - 2\Sigma^s a\right].$$

32. Table *des valeurs de la fonction* $\varphi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2} dt$.

Calculée d'après les valeurs données par Kramp et la table de M. Cournot.

α	φ (α)	DIFF.	α	φ (α)	DIFF.	α	φ (α)	DIFF.
0,00	0,00000	1128	0,40	0,42839	958	0,80	0,74210	590
0,01	0,01128	1129	0,41	0,43797	950	0,81	0,74800	581
0,02	0,02257	1127	0,42	0,44747	942	0,82	0,75381	571
0,03	0,03384	1127	0,43	0,45689	934	0,83	0,75952	562
0,04	0,04511	1126	0,44	0,46623	925	0,84	0,76514	553
0,05	0,05637	1125	0,45	0,47548	918	0,85	0,77067	543
0,06	0,06762	1124	0,46	0,48466	908	0,86	0,77610	534
0,07	0,07886	1122	0,47	0,49374	901	0,87	0,78144	525
0,08	0,09008	1120	0,48	0,50275	892	0,88	0,78669	515
0,09	0,10128	1118	0,49	0,51167	883	0,89	0,79184	507
0,10	0,11246	1116	0,50	0,52050	874	0,90	0,79691	497
0,11	0,12362	1114	0,51	0,52924	866	0,91	0,80188	489
0,12	0,13476	1111	0,52	0,53790	856	0,92	0,80677	479
0,13	0,14587	1108	0,53	0,54646	848	0,93	0,81156	471
0,14	0,15695	1105	0,54	0,55494	838	0,94	0,81627	462
0,15	0,16800	1102	0,55	0,56332	830	0,95	0,82089	453
0,16	0,17901	1098	0,56	0,57162	820	0,96	0,82542	445
0,17	0,18909	1095	0,57	0,57982	810	0,97	0,82987	436
0,18	0,20094	1090	0,58	0,58792	802	0,98	0,83423	428
0,19	0,21184	1086	0,59	0,59594	792	0,99	0,83851	419
0,20	0,22270	1081	0,60	0,60386	782	1,00	0,84270	411
0,21	0,23351	1079	0,61	0,61168	773	1,01	0,84681	403
0,22	0,24430	1072	0,62	0,61941	764	1,02	0,85084	394
0,23	0,25502	1068	0,63	0,62705	754	1,03	0,85478	387
0,24	0,26570	1062	0,64	0,63459	744	1,04	0,85865	379
0,25	0,27632	1058	0,65	0,64203	735	1,05	0,86244	370
0,26	0,28690	1052	0,66	0,64938	725	1,06	0,86614	353
0,27	0,29742	1046	0,67	0,65663	715	1,07	0,86977	356
0,28	0,30788	1040	0,68	0,66378	706	1,08	0,87333	347
0,29	0,31828	1035	0,69	0,67084	696	1,09	0,87680	340
0,30	0,32863	1029	0,70	0,67780	687	1,10	0,88020	333
0,31	0,33892	1021	0,71	0,68467	676	1,11	0,88353	326
0,32	0,34913	1015	0,72	0,69143	667	1,12	0,88679	318
0,33	0,35928	1008	0,73	0,69810	658	1,13	0,88997	311
0,34	0,36936	1002	0,74	0,70468	648	1,14	0,89308	304
0,35	0,37938	995	0,75	0,71116	638	1,15	0,89612	298
0,36	0,38933	988	0,76	0,71754	628	1,16	0,89910	290
0,37	0,39921	980	0,77	0,72382	619	1,17	0,90200	284
0,38	0,40901	973	0,78	0,73001	609	1,18	0,90484	277
0,39	0,41874	965	0,79	0,73610	600	1,19	0,90761	270
0,40	0,42839		0,80	0,74210		1,20	0,91031	

α	φ (α)	DIFF.
1,20	0,91031	264
1,21	0,91296	257
1,22	0,91533	252
1,23	0,91805	245
1,24	0,92050	240
1,25	0,92290	234
1,26	0,92524	227
1,27	0,92751	222
1,28	0 92973	217
1,29	0,93190	211
1,30	0,93401	205
1,31	0.93606	200
1,32	0,93806	195
1,33	0,94001	190
1,34	0,94191	185
1,35	0,94376	180
1,36	0,94556	175
1,37	0,94731	171
1,38	0,94902	165
1,39	0,95067	161
1,40	0,95228	157
1,41	0,95385	153
1,42	0,95538	148
1,43	0,95686	144
1,44	0.95830	140
1,45	0,95969	136
1,46	0,96105	132
1,47	0,96237	128
1,48	0,96365	125
1,49	0,96490	121
1,50	0,96611	117
1,51	0,96728	113
1,52	0,96841	111
1,53	0.96952	107
1,54	0,97059	103
1,55	0,97162	101
1,56	0,97263	97
1,57	0,97360	95
1,58	0,97455	91
1,59	0.97546	89
1,60	0,97635	

α	φ (α)	DIFF.
1,60	0,97635	86
1,61	0,97721	83
1,62	0,97804	80
1,63	0,97884	78
1,64	0,97962	75
1,65	0.98037	73
1,66	0 98110	71
1,67	0.98181	68
1,68	0,98249	66
1,69	0,98315	63
1,70	0 98379	62
1,71	0 98441	59
1,72	0,98500	58
1,73	0.98558	55
1,74	0,98613	54
1,75	0,98667	52
1.76	0,98719	50
1,77	0,98769	48
1,78	0.98817	47
1,79	0,98864	45
1,80	0,98909	43
1,81	0,98952	42
1,82	0,98994	41
1,83	0,99035	39
1,84	0,99074	37
1,85	0,99111	36
1 86	0.99147	35
1,87	0,99182	34
1,88	0,99216	32
1,89	0,99248	31
1,90	0,99279	30
1,91	0,99309	29
1,92	0,99338	28
1,93	0,99366	26
1,94	0,99392	26
1,95	0,99418	25
1,96	0,99443	23
1,97	0 99466	23
1,98	0,99489	22
1,99	0,99511	21
2,00	0,99532	

α	φ (α)	DIFF.
2,00	0,99532	94
2,05	0,99626	76
2 10	0,99702	62
2,15	0,99764	50
2,20	0,99814	40
2 25	0.99854	32
2,30	0,99886	25
2,35	0,99911	20
2,40	0,99931	17
2,45	0 99947	12
2,50	0,99959	10
2,55	0,99969	7
2.60	0,99976	6
2,65	0,99982	5
2,70	0.99987	3
2.75	0,99990	2
2,80	0.99992	2
2,85	0,99994	2
2.90	0,99996	1
2,95	0,99997	1
3.00	0,99998	

0 0443	0,050
0,0888	0,100
0,1337	0,150
0.1791	0,200
0,2253	0.250
0 2724	0,300
0,3208	0,350
0,3708	0,400
0,4227	0,450
0,4769	0,500
0,5342	0,550
0,5951	0,600
0,6608	0,650
0.7329	0,700
0,8134	0,750
0,9062	0,800
1,0179	0,850
1,1631	0,900
1,3859	0,950
1,8214	0,990
2,3268	0,999

33. **Tableau** *des positions des points d'impact de* 125 *balles sphériques tirées dans le pistolet d'officier, rayé en hélice, et rapportées au centre d'une cible à la distance de* 50 *mètres.*

Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	OBSERVATIONS.
	cm	cm		cm	cm		cm	cm		cm	cm		cm	cm	
1	+10	: 5	26	−32	0	51	−32	: 44	76	− 7	2 :	101	−24	6 :	Le canon de pistolet est placé sur chevalet, et l'axe dirigé à 0m 430 au-dessus du centre de la cible à 50m, centre auquel sont rapportés les écarts exprimés en centimètres. La charge du pistolet est de 1 gramme de poudre. La vitesse initiale de translation est de 134 m; la vitesse de rotation est de 248 tours par seconde. La position d'un nombre à droite ou à gauche du signe (:) indique que la déviation est à droite ou à gauche.
2	+37	5 :	27	− 4	4 :	52	− 4	: 27	77	−43	: 2	102	−30	: 8	
3	−24	29 :	28	−20	3 :	53	+ 3	13 :	78	− 7	19 :	103	−19	4 :	
4	+44	7 :	29	+ 2	27 :	54	− 4	: 28	79	−23	: 9	104	− 7	21 :	
5	−29	4 :	30	−15	20 :	55	− 9	: 28	80	− 2	2 :	105	− 4	18 :	
6	−12	: 11	31	+34	31 :	56	−23	: 5	81	−15	0	106	−48	: 7	
7	−14	: 6	32	−10	: 25	57	+18	: 28	82	+40	3 :	107	−38	: 6	
8	−10	6 :	33	− 5	0	58	+19	0	83	− 5	31 :	108	−41	: 26	
9	−37	: 24	34	+20	: 7	59	+41	24 :	84	− 2	42 :	109	+42	11 :	
10	−21	17 :	35	+44	27 :	60	− 6	1 :	85	+ 5	: 7	110	−27	1 :	
11	0	: 5	36	+43	17 :	61	+40	: 45	86	− 9	23 :	111	− 6	31 :	
12	−15	: 10	37	−12	: 10	62	− 6	: 40	87	−39	: 37	112	+28	18 :	
13	+41	: 43	38	+17	2 :	63	+37	9 :	88	− 4	18 :	113	+10	1 :	
14	+42	: 22	39	−20	11 :	64	−20	: 7	89	− 6	1 :	114	+20	10 :	
15	−24	23 :	40	−31	12 :	65	−11	10 :	90	−34	0	115	−35	: 37	
16	−13	1 :	41	−37	: 8	66	0	0	91	−28	23 :	116	−19	14 :	
17	−11	: 18	42	−11	: 22	67	−11	2 :	92	−10	26 :	117	−10	: 47	
18	+15	: 3	43	−40	15 :	68	−16	: 7	93	− 7	: 9	118	−42	20 :	
19	− 6	: 3	44	+30	10 :	69	+32	41 :	94	−29	: 49	119	−52	12 :	
20	+24	25 :	45	+33	: 2	70	−44	44 :	95	−52	: 36	120	− 9	: 40	
21	−40	: 5	46	−17	23 :	71	−30	: 8	96	+40	2 :	121	−34	44 :	
22	+39	: 29	47	−16	: 4	72	+ 8	: 56	97	− 8	: 40	122	−49	: 35	
23	−35	: 40	48	+13	14 :	73	−10	: 8	98	− 9	11 :	123	−11	13 :	
24	+16	7 :	49	+14	12 :	74	+20	2 :	99	+49	: 17	124	−20	: 13	
25	−28	: 13	50	−50	: 16	75	−32	37 :	100	−39	8 :	125	−19	6 :	
									Moyennes sur 125 coups. . . .				−8,25	0,02 :	

TABLEAU *des positions des points d'impact de 250 balles sphériques, tirées dans le pistolet d'officier, rayé en hélice, et rapportées au centre d'une cible à la distance de 100 mètres.*

Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	OBSERVATIONS.
	cm	cm		cm	cm		cm	cm		cm	cm		cm	cm	
1	+ 42	66 :	26	− 56	: 33	51	− 45	: 56	76	+ 9	48 :	101	+ 69	35 :	Le canon du pistolet est placé sur chevalet ; l'axe du canon prolongé passe à 1m 47 au-dessus du centre de la cible
2	+110	110 :	27	+ 20	: 40	52	− 21	61 :	77	+160	: 80	102	−156	: 20	
3	+ 20	: 53	28	− 14	: 21	53	− 26	13 :	78	+160	80 :	103	− 76	96 :	
4	+ 39	: 165	29	+ 98	: 170	54	+ 21	48 :	79	+103	63 :	104	− 24	: 58	
5	+ 29	71 :	30	+ 54	16 :	55	− 92	66 :	80	−139	: 59	105	+107	66 :	
6	− 19	: 34	31	− 27	4 :	56	− 48	42 :	81	+ 11	: 14	106	+ 13	63 :	
7	+ 29	: 47	32	− 49	: 81	57	− 48	25 :	82	−112	: 56	107	+ 51	61 :	
8	+ 98	: 199	33	−170	2 :	58	+ 3	113 :	83	−168	: 100	108	+ 43	: 49	
9	− 63	88 :	34	− 66	: 122	59	+ 11	141 .	84	− 6	31 :	109	+ 56	: 1	
10	− 22	57 :	35	−200	: 150	60	+ 10	101 :	85	− 7	43 :	110	+129	52 :	
11	− 43	39 :	36	− 29	: 52	61	− 43	: 78	86	+105	11 :	111	−116	: 36	
12	− 33	17 :	37	+ 13	2 :	62	+ 76	55 :	87	+ 29	: 8	112	+ 38	28 :	
13	− 20	25 :	38	+160	80 :	63	− 1	118 :	88	+ 59	: 16	113	− 1	: 43	
14	−180	: 82	39	− 94	99 :	64	−133	128 :	89	−160	: 159	114	−160	80 :	
15	+160	: 160	40	+ 36	16 :	65	− 71	102 :	90	+ 8	46 :	115	− 11	2 :	
16	+ 41	11 :	41	+101	: 26	66	− 61	16 :	91	− 9	3 :	116	+ 32	159 :	
17	− 95	: 22	42	− 9	5 :	67	− 27	150 :	92	+ 4	62 :	117	+ 56	68 :	
18	−106	: 197	43	+ 59	: 19	68	+ 21	: 4	93	+ 37	71 :	118	+ 6	62 :	
19	+ 69	: 103	44	+ 46	: 25	69	−139	: 78	94	−115	: 5	119	−102	61 :	
20	− 9	: 55	45	− 26	11 :	70	+ 80	170 :	95	− 79	89 :	120	+180	: 80	
21	+ 18	: 16	46	− 81	: 85	71	− 79	: 59	96	+ 61	119 :	121	−160	72 :	
22	+ 51	: 18	47	−170	125 :	72	−143	: 59	97	− 96	: 67	122	− 46	79 :	
23	− 34	: 34	48	− 37	170 :	73	− 64	: 49	98	+ 4	: 79	123	− 76	: 66	
24	−104	71 :	49	− 59	14 :	74	− 65	63 :	99	+119	79 :	124	+ 94	69 :	
25	− 27	: 26	50	+ 70	78 :	75	− 4	: 43	100	+147	146 :	125	+ 64	142 :	

Suite du tableau des positions des points d'impact de la balle sphérique dans le pistolet d'officier, rapportées au centre de la cible à 100 mètres.

Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	Nos	HAUTEUR.	DÉVIATION.	OBSERVATIONS.
	cm	cm		cm	cm		cm	cm		cm	cm		cm	cm	
126	+ 49	: 18	151	− 92	: 68	176	− 81	: 1	201	+ 49	: 1	226	− 22	: 3	
127	−104	121 :	152	+ 49	2 :	177	−190	: 55	202	+ 21	59 :	227	+ 64	: 9	
128	+ 19	159 :	153	− 55	176 :	178	+ 61	31 :	203	− 19	2 :	228	+ 39	: 49	
129	− 54	16 :	154	− 21	: 24	179	+ 57	: 49	204	−184	67 :	229	−236	: 45	
130	−108	: 69	155	+ 5	131 :	180	+ 49	69 :	205	−160	: 80	230	− 94	: 45	
131	+ 4	16 :	156	+ 28	117 :	181	+ 19	: 61	206	+ 11	: 34	231	− 59	: 19	
132	+ 29	121 :	157	+ 11	: 18	182	− 29	: 49	207	− 13	: 41	232	− 26	: 47	
133	−109	: 7	158	+ 69	19 :	183	+ 29	: 2	208	− 2	: 39	233	− 6	3 :	
134	+ 68	8 :	159	− 2	143 :	184	− 8	77 :	209	+ 49	: 41	234	− 69	154 :	
135	−170	: 45	160	+ 52	73 :	185	−160	: 67	210	− 9	: 42	235	− 5	: 55	
136	+ 8	109 :	161	+ 82	: 33	186	+ 45	34 :	211	− 46	: 115	236	− 21	: 67	
137	−184	: 68	162	+101	: 71	187	−122	104 :	212	+ 26	21 :	237	− 41	: 13	
138	+ 99	: 15	163	+112	113 :	188	−172	: 98	213	−210	: 87	238	− 69	: 85	
139	− 6	: 14	164	+170	80 :	189	+ 67	99 :	214	− 49	: 51	239	+ 57	2 :	
140	+ 29	: 16	165	+ 9	6 :	190	− 33	: 24	215	−104	: 79	240	+ 88	: 3	
141	− 62	: 28	166	− 24	54 :	191	+ 25	: 2	216	− 14	: 9	241	+ 42	: 44	
142	+ 93	61 :	167	− 14	: 51	192	− 66	: 79	217	− 4	: 126	242	− 38	: 19	
143	−164	15 :	168	+ 5	: 65	193	− 2	: 69	218	− 82	: 106	243	−107	: 49	
144	+ 12	2 :	169	+ 2	: 49	194	−201	: 63	219	− 45	: 74	244	+ 26	: 86	
145	+ 25	: 7	170	+ 97	171 :	195	− 82	: 4	220	− 36	: 23	245	−134	: 16	
146	− 20	110 :	171	+ 36	: 127	196	+ 46	: 19	221	−115	: 99	246	+ 31	4 :	
147	+ 39	11 :	172	+150	: 134	197	− 54	: 81	222	−164	: 31	247	+ 36	: 29	
148	+ 61	: 31	173	+ 56	128 :	198	+ 11	51 :	223	−188	: 62	248	−154	: 54	
149	+ 95	: 17	174	− 21	: 19	199	− 55	6 :	224	− 71	: 81	249	−145	131 :	
150	+119	32 :	175	− 91	: 115	200	−140	: 39	225	− 78	2 :	250	+ 34	: 21	
									Moyenne sur 250 coups				−15,82	1,72 :	

Coordonnées des trajectoires de 100 boulets de 16, tirés dans un canon de siége à la charge de 1k 333, sous l'inclinaison constante de 0,02593 aux distances de 200, 400 et 600 mèt., rapportées au plan de la plate-forme.

Nos des trajectoires.	à 200 m.		à 400 m.		à 600 m.	
	Hauteur.	Déviation.	Hauteur.	Déviation.	Hauteur.	Déviation.
	m	m	m	m	m	m
1	5,29	0,05 :	5,15	0,00	0.50	: 0,26
2	4,79	: 0,02	4,00	: 0,22	—1.19	: 0,36
3	4,14	0,25 :	4,97	0,89 :	0,80	1,55 :
4	4,19	0,60 :	5,62	1,90 :	1,50	3,30 :
5	4,89	0,08 :	4,82	0,52 :	0,30	1,22 :
6	5,59	0,10 :	6,55	0,57 :	2,85	1,68 :
7	4,79	: 0,10	4,20	: 0,54	—0,95	: 1 00
8	5,74	: 0,60	7,31	: 1,40	4,18	: 2,20
9	5,59	0,15 :	6,77	0,15 :	3 63	: 0,05
10	5,81	0,35 :	6,82	1,25 :	3,45	1,87 :
Moy.	5,08	0,08 :	5,62	0,31 :	1,51	0,57 :
11	4,97	0,10 :	4,62	0.00	—0,35	: 0,26
12	5,44	0,50 :	5,85	0,84 :	1,75	1,00 :
13	5,99	0,00	8,07	0,30 :	5.53	0,83 :
14	4,74	0,10 :	4,60	0,06 :	—0,17	0,00
15	5,56	: 1.08	6,32	: 2,45	2,23	: 4,75
16	5 24	0,02 :	5,80	0,03 :	1,75	0,00
17	5,34	0,25 :	5,52	0,90 :	1,00	1,35 :
18	5,24	0,32 :	5,57	1,07 :	1.25	1,55 :
19	5,29	0.20 :	5,50	0.50 :	1.25	0,67 :
20	5,04	0,20 :	5,15	0,56 :	0,90	0,77 :
Moy.	5,29	0,06 :	5,70	0,18 :	1,50	0,12 :

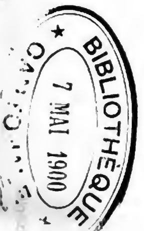
Nos des trajectoires.	à 200 m.		à 400 m.		à 600 m.	
	Hauteur.	Déviation.	Hauteur.	Déviation.	Hauteur.	Déviation.
	m	m	m	m	m	m
41	4,82	0,29 :	4,62	0,78 :	—1,56	1,00 :
42	5,20	0,10 :	5,48	0,03 :	0,87	0,00
43	4,98	0,20 :	4,98	0,15 :	—0,08	0,20 :
44	5,53	: 0,02	6,73	: 0,51	2,87	: 1,23
45	5,33	0,20 :	6,28	: 0,07	2,48	: 0,23
46	5,80	0,58 :	6,80	1,53 :	3,07	2,90 :
47	5,25	0,35 :	5,67	1,22 :	1,32	2,51 :
48	4,83	: 0,29	4,80	: 0,82	0,18	: 1,71
49	5,08	: 0.08	5,18	: 0,02	0,27	0,40 :
50	5,27	0.23 :	5,70	0,84 :	1,23	1,81 :
Moy.	5,21	0,16 :	5,62	0,31 :	1,06	0,61 :
51	5,97	: 0,32	7,40	: 0,82	4,07	: 1,38
52	5,77	0,00	6 88	: 0,24	3,22	: 0,31
53	5,17	0,23 :	4,97	0,17 :	—0,13	0.00
54	4,82	0,12 :	4.42	0,85 :	—0,22	1,64 :
55	5,47	0,10 :	5,63	0,16 :	0 82	0,03 :
56	5,52	0.00	6,15	0,19 :	2,07	0,20 :
57	5,57	0, 00	5,85	0,30 :	1,22	0,72 :
58	5,12	0,03 :	5 15	: 0,21	0,82	: 0,41
59	5 87	0.10 :	7.53	: 0,23	4,62	: 0,78
60	4,72	0,54 :	4,08	1,02 :	—1,63	: 1.38
Moy.	5,40	0,08 :	5,84	0,12 :	1,49	: 0,17

Nos des trajectoires.	à 200 m.		à 400 m.		à 600 m.	
	Hauteur.	Déviation.	Hauteur.	Déviation.	Hauteur.	Déviation.
	m	m	m	m	m	m
81	5,25	: 0,37	5,64	: 1,30	1,34	: 2,89
82	5,12	0,16 :	5,67	0,34 :	1,37	0,68 :
83	5,97	0,50 :	7,72	1,20 :	4,90	1,85 :
84	5,62	0,68 :	6,49	1,95 :	2,72	3,85 :
85	4,90	0,23 :	4,82	0,97 :	0,32	1,62 :
86	5,32	0,12 :	6,24	0,74 :	2,42	1,70 :
87	4,92	0,16 :	4,59	: 0,19	—0,35	: 0,51
88	6,07	0,18 :	7,32	0,64 :	3,72	1 08 :
89	5,32	0,08 :	6,04	: 0,60	2,40	: 1,23
90	5.47	0,44 :	6,14	0,69 :	1,77	0,99 :
Moy.	5,40	0,21 :	6,07	0,44 :	2,06	0,71 :
91	4,85	: 0,20	4,59	: 0,62	—1,58	: 1,44
92	5,52	0,63 :	5,48	1,37 :	2,37	2,25 :
93	5,17	: 0,38	4,98	: 1,18	1,47	: 2,28
94	5,32	: 0,65	6,19	: 1,93	2,40	: 3,38
95	5,20	: 0,28	6,29	: 1,11	0,47	: 2,00
96	4,97	: 0,55	5,19	: 0,70	0,84	: 1,04
97	4.80	: 0,09	4,44	: 0,25	—1,28	: 0,20
98	5,65	: 0,08	6,84	: 0.16	3,34	: 0,05
99	5,00	: 0,18	4,64	: 0,58	—0,68	: 0,83
100	5,90	: 0,07	6,94	: 0.14	3,12	: 0,28
Moy.	5,24	: 0,19	5,53	: 0,53	1,05	: 0,90
Moyenne sur 100 coups. . . .	5,297	0,039 :	5,685	0,035 :	1,377	0,061 :

21	5,27	:0,47	5,63	:1,15	0,97	:2,28	61	4,75	0,34:	4,98	0,66:	0,27	1,49:
22	5,67	0,49	6,53	0,75:	2,45	1,75:	62	4,88	:0,13	4,55	:0,40	—0,75	:0,52
23	5,47	:0,45	5,73	:0,70	1,17	:0,78	63	5,60	0,12:	5,97	0,50:	1,32	1,30:
24	5,70	:0,30	6,63	:0,70	2,97	:1,12	64	5,25	0,47:	5,63	1,18:	0,82	2,21:
25	5,57	0,40:	6,70	0,39:	3,12	0,70:	65	5,58	0,21:	6,02	0,91:	1,65	1,82:
26	4,17	0,15:	2,82	0,35:	—2,87	0,70:	66	4,97	0,00	4,59	0,01:	—0,58	0,27:
27	5,50	:0,32	6,10	:1,02	2,07	:1,77	67	5,82	0,17:	7,44	0,20:	4,52	0,30:
28	5,62	0,65	6,22	1,50:	2,17	2,20:	68	5,67	0,04:	6,54	:0,39	2,52	:0,85
29	5,17	:0,42	5,27	:1,60	0,57	:2,94	69	4,95	0,74:	4,84	1,52:	—1,08	2,26:
30	5,08	:0,25	5,40	:0,67	1,27	:1,22	70	5,07	0,03:	5,34	:0,69	0,92	:1,56
Moy.	5,32	:0,08	5,70	:0,28	1,92	:0,48	Moy.	5,25	0,20:	5,59	0,35:	0,96	0,64:
31	5,82	0,27	6,93	0,08:	3,22	0,05:	71	5,27	:0,16	5,63	:0,52	1,18	:0,55
32	5,24	0,56:	5,58	0,92:	1,40	1,20:	72	5,07	:0,64	4,82	:1,85	0,22	:3,15
33	4,83	:0,30:	4,35	:0,57	—0,69	:0,90	73	5,55	0,48:	5,75	1,45	0,83	2,93:
34	6,20	:0,12	8,45	:0,30	5,99	0,00	74	5,87	:0,41	7,55	:1,31:	4,68	:2,27
35	5,23	:0,15	5,25	:0,10	0,81	0,25:	75	5,57	0,80:	6,27	1,53:	2,07	2,42:
36	5,05	0,00:	4,85	0,42:	0,01	1,20:	76	5,02	:0,45	5,42	:1,08	0,52	:1,35
37	4,98	:0,40	4,60	:1,61	—0,49	:2,75	77	5,55	0,36:	4,83	0,82:	1,22	2,80:
38	5,58	:0,52	6,40	:1,25	2,81	:1,85	78	5,27	0,11:	6,02	0,20:	2,07	0,25:
39	4,48	:0,30	3,70	:0,96	—1,82	:0,90	79	5,27	0,06:	5,62	0,06:	1,18	0,00
40	5,43	:0,20	6,00	:0,38	2,16	:0,35	80	5,52	:0,22	6,32	:1,11	2,48	:1,95
Moy	5,38	:0,12	5,50	:0,37	1,32	:0,40	Moy.	5,40	:0,01	5,80	:0,18	1,62	:0,09

Nota. Les distances sont comptées à partir de la tranche de la bouche du canon, et les hauteurs au-dessus du plan de la plate-forme, qui est à 1m,38 au-dessous du centre de la bouche du canon.

La position d'un nombre à droite ou à gauche du signe (:) indique que le sens de la déviation est à droite ou à gauche.



chute des
s des Cour
mbres qui .

… des limites entre lesquelles on a une probabilité donnée de frapper.

Fig 9.
Limites des écarts rapportés au moyen écart.

Ecart du centre pour h = k = l
Ecart de la verticale ou de l'horizontale pour h = k = l

Fig 8.
à 600 mètres.
h = 1m 618
k = 1 . 642
l = 2 . 316

Ecart du Centre
Ecart vertical
Ecart horizontal

Fig. 7.
à 400 mètres.
h = 0m 901
k = 1 . 061
l = 1 . 393

Ecart du Centre
Ecart vertical
Ecart horizontal

Fig 6.
à 200 mètres.
h = 0m.3010
k = 0 . 3919
l = 0 . 5235

Ecart du Centre.
Ecart vertical.
Ecart horizontal.

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
Probabilité d'atteindre.

Lith. Geyer, r. Dauphine, Paris

